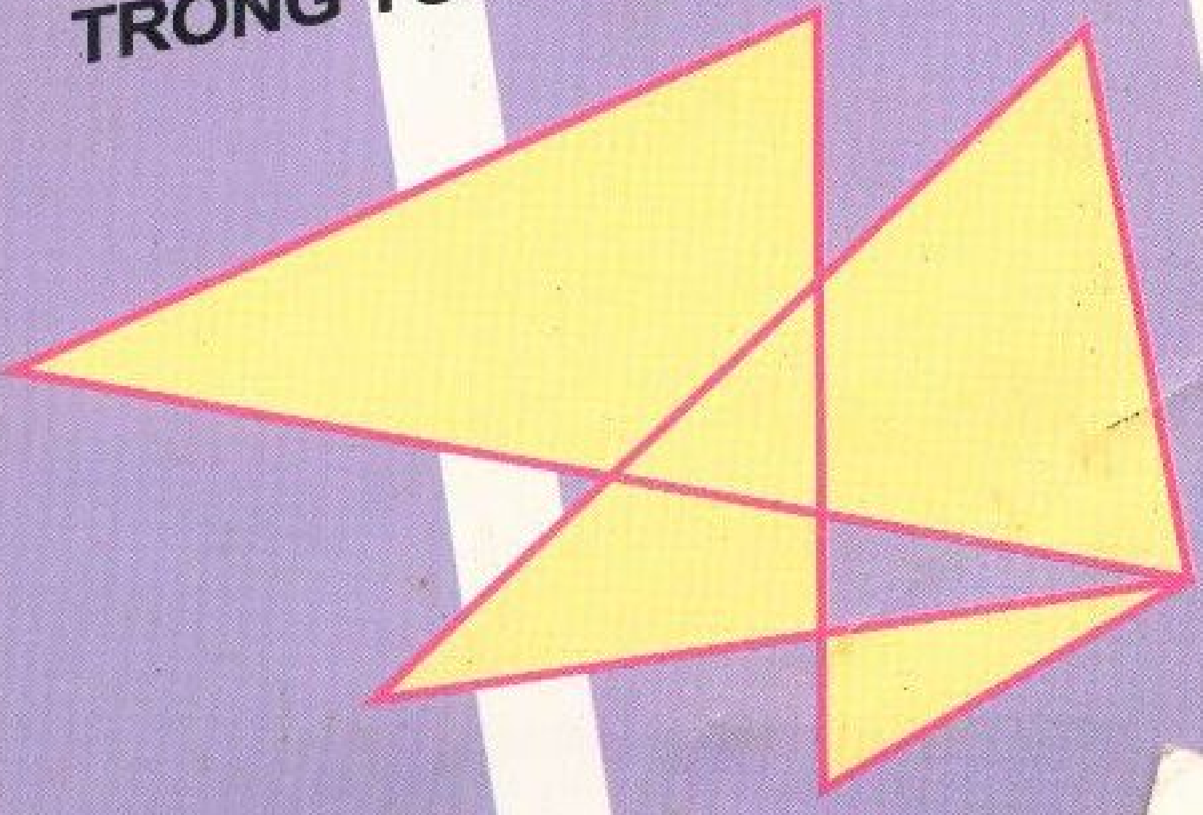
VŨ QUỐC ANH

NHẬN DIỆN TAM GIÁC

ĐỀ THI VÀO ĐẠI HỌC CAO ĐẲNG TỪ NĂM 1970 ĐẾN 2000-2001 TRONG TOÀN QUỐC



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC G

VŨ QUỐC ANH

NHẬN DIỆN TAM GIÁC

ĐỀ THI VÀO ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG

TỪ NĂM 1970 ĐẾN 2000-2001

TRONG TOÀN QUỐC

(In lần thứ hai có sửa chữa bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập và sửa bản in: NGUYỄN LAN HƯƠNG

Biên tập tái bản: NGUYỄN LAN HƯƠNG

Trình bày bìa: TRẦN TIỂU LÂM

NHẬN DIỆN TAM GIÁC - ĐỀ THI VÀO ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG TỪ NĂM1 1970 ĐẾN 2000-2001 TRONG TOÀN QUỐC

Mã số: 1L-01007 - 02204
In 2000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 tại Công ty In và Văn hoá phẩm.
Số xuất bản: 28/154/XB-QLXB, ngày 18/2/2004. Số trích ngang: 43 KH/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2004.

Chương I

NHỮNG ĐIỀU CẦN NHỚ VÀ CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

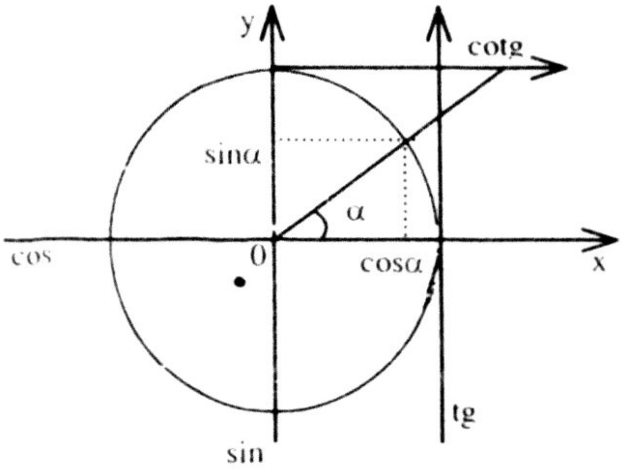
1. Đơn vị đo góc và cung

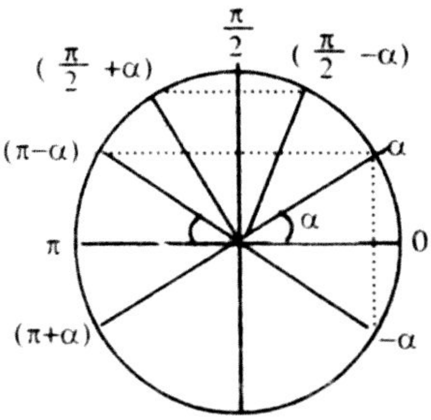
$180^0 = \pi$ radian $\qquad\qquad 1^0 = \dfrac{\pi}{180}$ radian

π radian $= 180^0 \qquad\qquad 1$ radian $= \left(\dfrac{180}{\pi}\right) = 57^0 17' 45''$

Radian là số đo một cung có độ dài bằng bán kính.

2. Tên gọi các trục sin, cosin, tg và cotg.





$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad ; \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in Z)$$

$$\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad ; \qquad x \neq k\pi \qquad (k \in Z)$$

Chú ý: $-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \Leftrightarrow |\cos\alpha| \leq 1$

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \Leftrightarrow |\sin\alpha| \leq 1$

$\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ có tính tuần hoàn chu kỳ là 2π

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi) \qquad (k \in Z)$

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi) \qquad (k \in Z)$

$\text{cotg}\alpha$ và $\text{tg}\alpha$ có tính tuần hoàn chu kỳ là π

$\text{cotg}\alpha = \text{cotg}(\alpha + k\pi) \qquad (k \in Z)$

$\text{tg}\alpha = \text{tg}(\alpha + k\pi) \qquad (k \in Z)$

$\text{cotg}\alpha$ và $\text{tg}\alpha$ có thể lấy giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$

3. Hàm số lượng giác một số cung đặc biệt

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||
$cotg\alpha$	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. Giải phương trình lượng giác

1. $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$
   và $x = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$
2. $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$
   và $x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad (k \in Z)$
3. $tgx = tg\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in Z)$
4. $\cos x = \sin\alpha \Leftrightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

5. Giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{tg\,ax}{ax} = 1 \quad (a \neq 0)$$

6. Bất đẳng thức Côsi với ba cạnh của tam giác

$$\frac{a+b+c}{3} \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Dấu " = " xảy ra khi $a = b = c$

7. HỆ THỨC GIỮA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \sin^2\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$$

$$\mathrm{tg}\alpha.\mathrm{cotg}\alpha = 1 \qquad \cos^2\alpha = (1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha)$$

8. CUNG ĐỐI NHAU α và $(-\alpha)$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$$

$$\mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha$$

9. CUNG BÙ NHAU α và $(\pi - \alpha)$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$$

$$\mathrm{cotg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha$$

10. CUNG PHỤ NHAU α và $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{cotg}\alpha$$

$$\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\alpha$$

11. CUNG HƠN NHAU $\frac{\pi}{2}$ (α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{cotg}\alpha$$

$$\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{tg}\alpha$$

12. CUNG BÙ HƠN NHAU π: (α VÀ π + α)

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$$

$$\mathrm{cotg}(\pi + \alpha) = \mathrm{cotg}\alpha$$

13. CÔNG THỨC CỘNG CUNG, CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI, NHÂN BA.

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

$$\mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b}{1 - \mathrm{tg}a\mathrm{tg}b}$$

$$\mathrm{tg}(a-b) = \frac{\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}b}{1 + \mathrm{tg}a\mathrm{tg}b}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$\mathrm{tg}2a = \frac{2\mathrm{tg}a}{1 - \mathrm{tg}^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

sina, cosa đổi ra $\mathrm{tg}\frac{a}{2}$:

$$\sin a = \frac{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}} \; ; \quad \cos a = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}} \; ; \quad \mathrm{tg}a = \frac{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\mathrm{tg}3a = \frac{3\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}^3 a}{1 - 3\mathrm{tg}^2 a}$$

$$\mathrm{cotg}3a = \frac{1 - 3\mathrm{tg}^2 a}{3\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}^3 a}$$

14. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\mathrm{cotg}a + \mathrm{cotg}b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$$

$$\mathrm{cotg}a - \mathrm{cotg}b = \frac{\sin(a-b)}{\sin a.\sin b}$$

15. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

16. CÁC HỆ QUẢ:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

17. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SINX VÀ COSX

$$a\sin x + b\cos x = c$$

$$\frac{a\sin x}{a} + \frac{b\cos x}{a} = \frac{c}{a} \qquad (a \neq 0)$$

$$\sin x + \operatorname{tg}\alpha\cos x = \frac{c}{a} \qquad (\text{đặt } \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha)$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

Điều kiện:

$$\left|\frac{c}{a}\cos\alpha\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{a^2} \leq \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{c^2}{a^2} \leq 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{b^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad c^2 \leq a^2 + b^2$$

18. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \qquad (a, b, c \neq 0)$$

$$a\frac{1 - \cos 2x}{2} + b\frac{1}{2}\sin 2x + c\frac{1 + \cos 2x}{2} = d$$

$$(c - a)\cos 2x + b\sin 2x = 2d - a - b$$

19. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad (|t| \leq \sqrt{2})$

Suy ra: $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

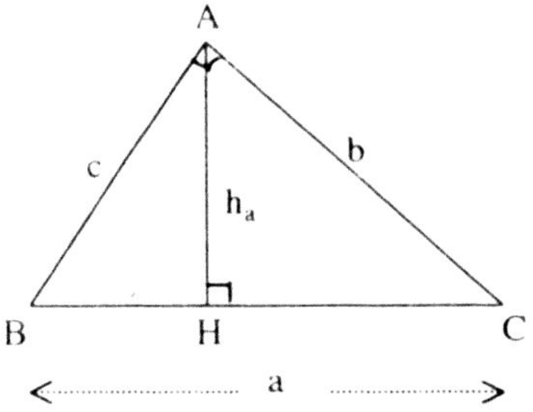
Khi đó (1) trở thành:

$$at + b\frac{t^2 - 1}{2} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow bt^2 + 2at + 2c - b = 0$$

Giải phương trình bậc hai theo t nhưng chỉ nhận các nghiệm thoả mãn điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

20. Hệ thức cơ bản trong tam giác vuông



$$\hat{A} = \frac{\pi}{2} \;; \qquad \hat{B} = \frac{\pi}{2} - \hat{C}$$

$$b = a\sin\hat{B} = a\cos\hat{C}$$

$$b = \text{ctg}\,\hat{B} = c\,\text{cotg}\,\hat{C}$$

Định lý Pytago:

$$\begin{cases} b^2 = BC.HC \\ c^2 = BC.HB \end{cases} \Rightarrow \; b^2 + c^2 = BC(HC + HB) = BC.BC$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc \qquad \text{suy ra} \quad (ah_a)^2 = (bc)^2 \qquad (1)$$

Từ (1):

$$a^2h_a^2 = b^2c^2$$

$$h_a^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} \qquad \text{hay} \quad \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

21. Hệ thức cơ bản trong tam giác thường.

1. Định lý hàm số sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Suy ra $\sin A = \dfrac{a}{2R}$; $\sin B = \dfrac{b}{2R}$; $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

2. Định lý hàm số cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

3. Định lý hàm số tang:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\text{tg}\,\frac{A-B}{2}}{\text{tg}\,\frac{A+B}{2}}$$

22. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

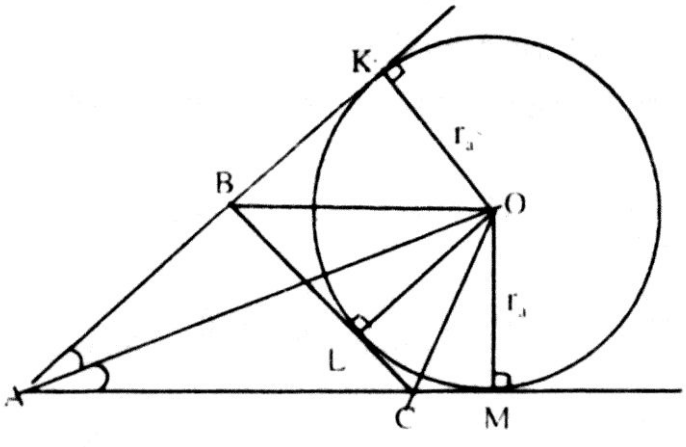
23. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác:

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}$$

$$r=\frac{b\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=(p-b)\text{tg}\frac{B}{2}$$

$$r=\frac{c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=(p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$$

24. Bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác:



$$OK = OL = OM = r_a$$

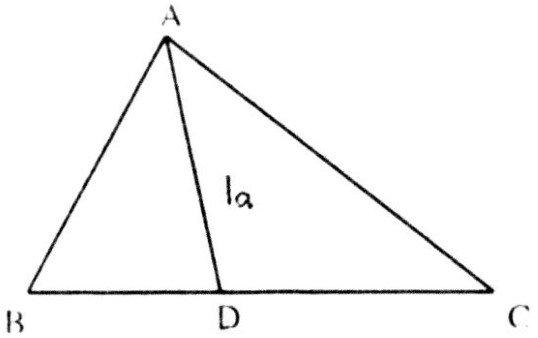
r_a bán kính đường tròn bàng tiếp đối diện góc $\hat{A}$ của ΔABC

$$r_a = \frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \text{ptg}\,\frac{A}{2}$$

$$r_b = \frac{b\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \text{ptg}\,\frac{B}{2}$$

$$r_c = \frac{c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \text{ptg}\,\frac{C}{2}$$

25. ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG CỦA TAM GIÁC

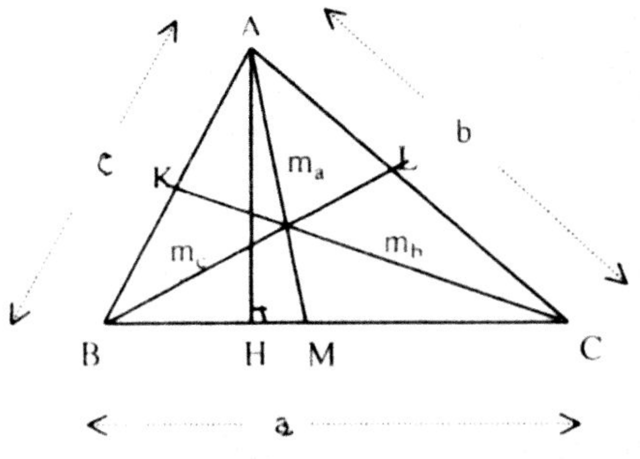


AD=l: phân giác trong của góc A

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$l = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

26. ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN TAM GIÁC



Tổng bình phương hai cạnh tam giác:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = \dfrac{a^2}{2} + 2m_a^2 \\ a^2 + b^2 = \dfrac{c^2}{2} + 2m_c^2 \\ a^2 + c^2 = \dfrac{b^2}{2} + 2m_b^2 \end{cases}$$

$AM = m_a$; $BL = m_b$
$CK = m_c$; $BC = a$
$AC = b$; $AB = c$

Hiệu bình phương hai cạnh tam giác:

$$b^2 - c^2 = 2a.HM$$

27. DIỆN TÍCH TAM GIÁC:

1. $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

2. $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

3. $S = \frac{abc}{4R}$

4. $S = pr$

5. $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

6. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$

(Công thức Hê rông)

28. ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC:

$f: x \to \cos x$	$f': x \to -\sin x$
$f: x \to \sin x$	$f': x \to \cos x$
$f: x \to \mathrm{tg}x$	$f': x \to \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$
$f: x \to \mathrm{cotg}x$	$f': x \to \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \mathrm{cotg}^2 x)$
$f: x \to \cos(ax + b)$	$f': x \to -a\sin(ax + b)$
$f: x \to \sin(ax + b)$	$f': x \to a\cos(ax + b)$

CHƯƠNG II

PHẦN HƯỚNG DẪN

ĐỀ THI TỪ NĂM 1970 ĐẾN NĂM 1991

BÀI 1

Chứng minh rằng nếu A,B,C là 3 góc của một tam giác thì:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} + 1$$

Trường Công An Trung ương(1970)

GIẢI

$$\cos A+\cos B+\cos C = \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} + 1$$

Biến đổi vế trái:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\cos^2\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) + 1$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}(-2)\sin\frac{A}{2}\sin(-\frac{B}{2}) + 1$$

$$= 4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 1 \qquad (1)$$

Vì $\frac{A}{2}$ và $\frac{B+C}{2}$ là 2 góc phụ nhau , $\frac{B}{2}$ và $\frac{A+C}{2}$ là 2 góc phụ nhau nên(1) có thể viết :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} + 1 \text{ (đpcm)}$$

BÀI 2

Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC, người ta chọn lần lượt các điểm M, N, D thoả mãn điều kiện:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=k$$

với k là số cho trước

a/ Hãy tính diện tích tam giác MNP theo k và S

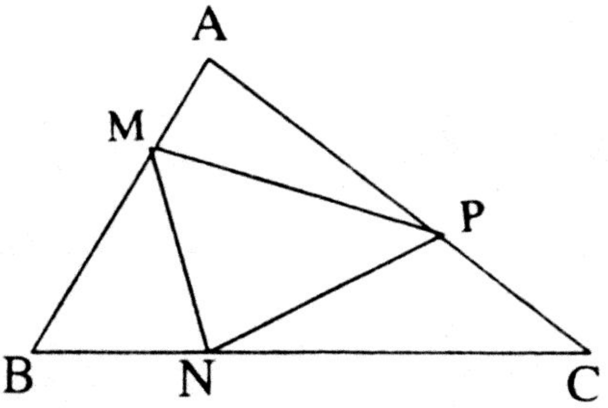
b/ Tam giác ABC cố định. Hãy chọn k sao cho tam giác MNP có diện tích nhỏ nhất.

Đại học Tổng hợp Hà Nội (1970

Giải

a/ Ta có:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=k\ \ (0<k<1)$$



$$\Rightarrow AM = kMB;$$

$$AM+MB = kMB+MB = AB$$

$$\Rightarrow MB = \frac{AB}{1+k},$$

$$BN = kNC;$$

$$BN+NC = kNC + NC = BC$$

$$\Rightarrow NC = \frac{BC}{1+k}$$

$$CP = kPA;$$

$$CP + PA = kPA + PA = CA$$

$$\Rightarrow PA = \frac{CA}{1+k}$$

$$dt(\Delta AMP) = \frac{1}{2}AM.\ AP\sin A = \frac{1}{2}kMB.\frac{CA}{1+k}\sin A$$

$$= \frac{1}{2}k\frac{AB}{1+k}.\frac{CA}{1+k}\sin A = \frac{k}{(1+k)^2}dt(\Delta ABC)\ \ (1)$$

$$= \frac{k}{(1+k)^2} dt(\Delta ABC) \qquad (2)$$

$$dt(\Delta CPN) = \frac{1}{2} NC.CP\sin C = \frac{1}{2}\frac{BC}{1+k}.k\frac{CA}{1+k}\sin C$$

$$= \frac{k}{(1+k)^2} dt(\Delta ABC) \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) ta được:

$$S_1 = dt(\Delta AMP) + dt(\Delta BMN) + dt(\Delta CPN) = \frac{3k}{(1+k)^2} dt(\Delta ABC)$$

$$= \frac{3k}{(1+k)^2} S$$

$$dt(\Delta MNP) = dt(\Delta ABC) - S_1$$

$$= S - \frac{3k}{(1+k)^2} S$$

$$= \boxed{\left(1 - \frac{3k}{(1+k)^2}\right) S}$$

b/ Diện tích ΔMNP nhỏ nhất khi $1 - \frac{3k}{(1+k)^2}$ nhỏ nhất hay

$\frac{3k}{(1+k)^2}$ lớn nhất.

$$\frac{k}{(1+k)^2} = \frac{1}{\frac{(1+k)^2}{k}} = \frac{1}{\frac{1+2k+k^2}{k}} = \frac{1}{\frac{1}{k}+2+k}$$

$\frac{k}{(1+k)^2}$ lớn nhất khi $\left(\frac{1}{k}+k+2\right)$ nhỏ nhất $\Rightarrow$ $\left(\frac{1}{k}+k\right)$ nhỏ nhất,

khi đó $\frac{1}{k} + k \geq 2\sqrt{\frac{1}{k}.k} = 2$

Dấu "=" xảy ra khi k = 1

Tam giác MNP nhỏ nhất khi k = 1

$$dt(\Delta MNP) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)S = \frac{1}{4}S \quad (dt(\Delta ABC))$$

BÀI 3

Gọi r và R lần lượt là bán kính của vòng tròn nội tiếp và của vòng tròn ngoại tiếp của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}$$

Trường Công An Trung ương (1970)

GIẢI

Chứng minh: $\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}$

Theo định lý hàm số cosin, ta có:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= (b-c)^2 + 2bc(1-\cos A) \\ &= (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2} \end{aligned}$$

Do đó: $4bc\sin^2\frac{A}{2} \le a^2$

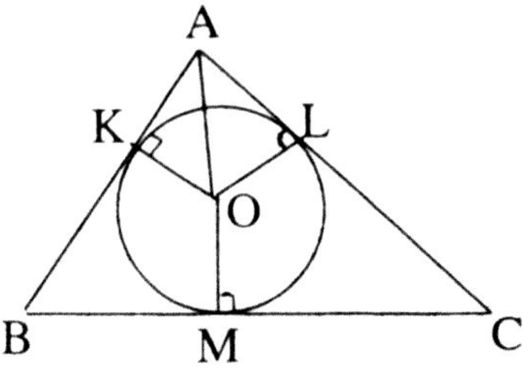
$$\Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}} \qquad (1)$$

Tương tự: $$\sin\frac{B}{2} \le \frac{b}{2\sqrt{ac}} \qquad (2)$$

$$\sin\frac{C}{2} \le \frac{c}{2\sqrt{ab}} \qquad (3)$$

Nhân (1), (2) và (3) từng vế một, ta được:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{abc}{8\sqrt{a^2b^2c^2}} = \frac{1}{8} \qquad (4)$$



Trong tam giác ABC có các tiếp tuyến AK=AL, BK=BM, MC=LC

$$2(AK + BM + MC) = 2p$$

$$AK + a = p$$

$$AK = p - a$$

Trong tam giác vuông AKO ta có:

$$OK = r = AK\text{tg}\,\frac{A}{2}$$

$$r = (p - a)\text{tg}\,\frac{A}{2}$$

$$r = \frac{b + c - a}{2}\text{tg}\,\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2R(\sin B + \sin C - \sin A)}{2}\text{tg}\,\frac{A}{2}$$

$$= R\left(2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\frac{\sin A}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$= 2R\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R} \qquad (5)$$

Thế (5) vào (4) ta được:

$$\frac{r}{4R} \le \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{r}{R} \le \frac{1}{2} \text{ (đpcm)}$$

Cách khác:

Biết $S = pr = \frac{abc}{4R} \Rightarrow r = \frac{S}{p}$ và $R = \frac{abc}{4S}$

TL. LƯU CHIỂU
SỐ: LC/946

Do đó:
$$\frac{r}{R} = \frac{\dfrac{S}{p}}{\dfrac{abc}{4S}} = \frac{4S^2}{pabc}$$

$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \quad (1)$$

Vì p – a; p – b; p – c là ba số dương nên:

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{p-b+p-c}{2} = \frac{a}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{(p-a)(p-c)} \le \frac{p-a+p-c}{2} = \frac{b}{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{c}{2} \quad (4)$$

Nhân (2), (3), (4) từng vế ta có:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8} \quad (5)$$

Thế (5) vào (1) ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

BÀI 4

Chứng minh rằng để cho tam giác ABC có góc A vuông, điều kiện cần và đủ là:

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

Đại học Tổng hợp Hà Nội (1974, A)

GIẢI

a/ Điều kiện cần:

ABC là tam giác vuông góc tại A nên ta có:

$\sin A = 1$, $\sin B = \cos C$ và $\sin C = \cos B$

và $\cos B + \cos C \neq 0$

Ta có: $1 = \dfrac{\cos C + \sin C}{\cos C + \sin C} = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$

b/ Điều kiện đủ:

Từ điều kiện: $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ ta suy ra:

$$\sin A\cos B + \sin A\cos C = \sin B + \sin C$$

Biến đổi vế trái

$$\sin A\cos B = \sin(A + B) - \sin B\cos A = \sin C - \sin B\cos A \qquad (1)$$

$$\sin A\cos C = \sin(A + C) - \sin C\cos A = \sin B - \sin C\cos A \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) từng vế một, ta có:

$$\sin B + \sin C - \cos A(\sin B + \sin C) = \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \qquad \cos A(\sin B + \sin C) = 0 \qquad (3)$$

Do sinB và sinC lớn hơn không, từ (3) ta có cosA = 0

Vậy tam giác ABC vuông góc tại A $\Leftrightarrow$ $A = 90^0$

Điều kiện đủ (cách khác)

$$\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \cot g\frac{A}{2}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

Vì B, C là các góc của tam giác nên:

$$\frac{B-C}{2} < 90^0$$

$$\cos\frac{B-C}{2} \neq 0$$

Do đó ta có:

$$\sin A = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow A = 90^0$$

BÀI 5

Cho ΔABC có ba cạnh là a, b, c. Giả sử trung tuyến AM phát xuất từ A có độ dài bằng $\frac{c}{2}$. Chứng minh :

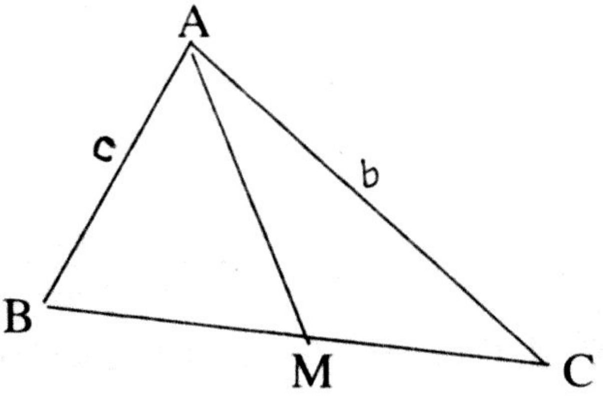
$$2b^2 = a^2 - c^2$$

$$2\sin B = \sin(A - C)$$

Đại học Bách Khoa (1976)

GIẢI

Trong ΔABC, ta có:



$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 - c^2 \quad (1)$$

Từ định lý hàm số sin, ta suy ra:

$$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(2R\sin B)^2 = (2R\sin A)^2 - (2R\sin C)^2 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 C$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 B = (\sin A + \sin C)(\sin A - \sin C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 B = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}.2\cos\frac{A+C}{2}\sin\frac{A-C}{2}$$

$$= \sin(A + C)\sin(A - C) = \sin(\pi - B)\sin(A - C)$$

$$= \sin B.\sin(A - C)$$

Vì $\sin B \neq 0$ nên $2\sin B = \sin(A - C)$

BÀI 6

a, b, c là ba cạnh của một tam giác vuông nội tiếp trong một vòng tròn có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ấy có ba góc nhọn là:

$$a^2 + b^2 + c^2 > 8$$

Đại học Tổng hợp (1979, A, B)

GIẢI

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 > 9$

Biết $R = 1$ nên:

$$a = 2R\sin A = 2\sin A$$
$$b = 2R\sin B = 2\sin B$$
$$c = 2R\sin C = 2\sin C$$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 = 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

$$= 4\left(\frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C\right)$$
$$= 4[2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2(A+B)]$$
$$= 4[2 - \cos(A+B)((\cos(A-B) + \cos(A+B))]$$
$$= 4[(2 + \cos C.2\cos A\cos B)]$$
$$= 8(1 + \cos A\cos B\cos C) \qquad (1)$$

Điều kiện cần. Vì ABC là tam giác nhọn nên:

$\cos A.\cos B.\cos C > 0$ do đó (1) $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 > 8$

Điều kiện đủ. Vì $a^2 + b^2 + c^2 > 8$ nên từ (1) ta phải có: $\cos A\cos B\cos C>0$, do đó các góc của tam giác ABC phải là các góc nhọn.

BÀI 7

a, b, c là ba cạnh của một tam giác vuông, c là cạnh huyền; x, y là hai số thực thoả mãn hệ thức ax + by = c. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

Đại học Tổng hợp Hà Nội (1980, A)

GIẢI

Theo bất đẳng thức Bunhicốpxki ta có:

$$(ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

$$c^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \qquad (1)$$

Vì ΔABC vuông nên: $a^2 + b^2 = c^2$

Do đó từ (1) ta có:

$$c^2 \le c^2(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + y^2 \ge 1 \quad (\text{đpcm})$$

BÀI 8

Gọi a, b, c lần lượt là các cạnh đối diện với các góc A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu hai điều kiện sau được thoả mãn:

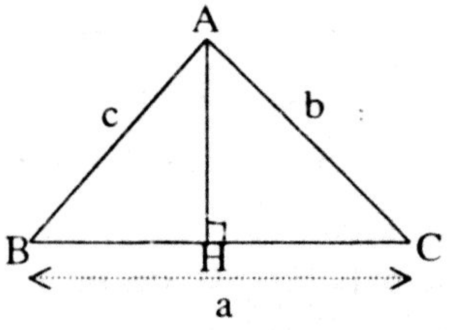
$$\begin{cases} \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b\cos C \end{cases}$$

thì tam giác ABC là tam giác đều

Đại học Tổng hợp Hà Nội (1983, A)

GIẢI

$$\begin{cases} \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 & (1) \\ a = 2b\cos C & (2) \end{cases}$$



$(1) \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^3 = a^2(b + c - a)$

$\Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2(b + c)$

$\Leftrightarrow \qquad b^2 + c^2 - bc = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\Leftrightarrow \qquad \cos A = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; A = 60^0$$

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống cạnh BC Từ

(2) ta có: $\dfrac{a}{2} = b\cos C = CH \Rightarrow$ H là trung điểm của BC.

⇒AH là trung tuyến kẻ từ A, do đó ABC là tam giác cân có B = C và góc A = 60^0 nên tam giác ABC là tam giác đều.

Cách khác: Từ (2) ta có $\cos C = \dfrac{a}{2b}$

Theo định lý hàm số cosin ta có:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\frac{a}{2b}$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 = c^2 \text{ hay } b = c$$

Thay b = c vào (1) ta được a = b = c ⇔ ΔABC là đều.

BÀI 9

Trong tam giác ABC, đặt BC= a, h là đường cao hạ từ đỉnh A.

a/ Chứng minh rằng: asinBsinC = hsin(B + C)

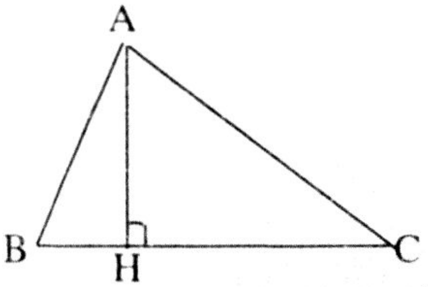
b/ Tính các góc B, C nếu biết góc A = α và tỷ số $\dfrac{a}{h} = k$

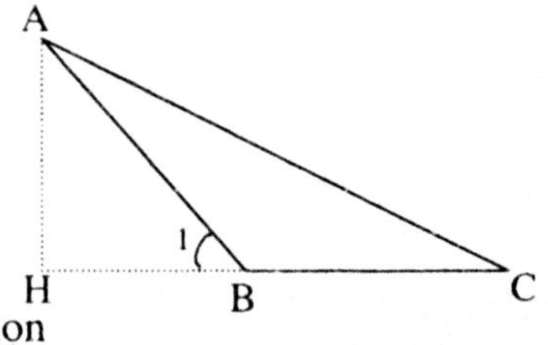
Với điều kiện nào đối với α và k thì bài toán giải được.

Đại học Tổng hợp Hà Nội (1983)

GIẢI

a)





- Trường hợp ba góc A, B, C đều nhọn

Ta có: $BC = a = BH + HC$

$$= h(\text{cotg}B + \text{cotg}C)$$

$$= \frac{h\sin(B+C)}{\sin B\sin C}$$

- Trường hợp một góc tù (góc B tù, A và C nhọn)

Ta có: $BC = HC - HB$

$$= h(\text{cotg}C - \text{cotg}B_1)$$

Vì B_1 và ABC là hai góc bù nhau nên $\text{cotg}B_1 = \text{cotg}(\pi - B) = -\text{cotg}B$

nên: $$BC = h(\text{cotg}C + \text{cotg}B)$$

$$= \frac{h\sin(B+C)}{\sin B\sin C}$$

Cách khác: Gọi a, b, c là ba cạnh, R, S là bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích tam giác ABC.

Theo định lý hàm số sin ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \sin B = \frac{b}{2R}$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ah$$

Ta có:

$$a\sin B\sin C = a\frac{b}{2R}\sin C$$

$$= \frac{2S}{2R} = \frac{ah}{2R} = h\sin A$$

$$a\sin B\sin C = h\sin(B+C)$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{h\sin(B+C)}{\sin B\sin C}$$

b/ Với $k = \frac{a}{h}$ từ câu(a) ta suy ra:

$$k = \frac{\sin\alpha}{\sin B\sin C}$$

Kết hợp với $A = \alpha = \pi - (B + C)$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} B + C = \pi - \alpha & (1) \\ \sin B\sin C = \dfrac{\sin\alpha}{k} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta suy ra:

$$\frac{1}{2}[\cos(B - C) - \cos(B + C)] = \frac{\sin\alpha}{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(B - C) + \cos\alpha = \frac{2\sin\alpha}{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(B - C) = \frac{2\sin\alpha - k\cos\alpha}{k} = \cos\beta$$

Vì $-\pi < B-C < \pi$ nên $-1 \le \dfrac{2\sin\alpha - k\cos\alpha}{k} \le 1 \quad (0 < \beta < \pi) \qquad (3)$

Từ đó ta có:

Hoặc $\begin{cases} B + C = \pi - \alpha \\ B - C = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta) \\ C = \dfrac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) \end{cases}$

Hoặc $\begin{cases} B + C = \pi - \alpha \\ B - C = -\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) \\ C = \dfrac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta) \end{cases}$

Do $0 < A < \alpha < \pi$; $k = \dfrac{a}{h} > 0$ ta phải có:

$$\frac{2\sin\alpha - k\cos\alpha}{k} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\alpha < k(1 + \cos\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} < \frac{k}{2}$$

Vậy để bài toán giải được ta phải có: $\boxed{0 < \alpha < \pi \text{ và } k > 2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$

BÀI 10

Các góc tam giác ABC thoả mãn hệ thức:

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A}$$

1. Chứng minh rằng $\cos B + \cos C = 1$

2. Tính các góc B, C biết tỷ số $\dfrac{b}{c} = k$ trong đó b, c lần lượt là độ dài các cạnh đối diện với các góc B, C.

Đại học Tổng hợp Hà Nội (1985, A)

GIẢI

1. Hệ thức: $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin(B+C)\cos(B-C)}{2\sin A\cos A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}=\frac{\cos(B-C)}{-\cos(B+C)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}=-\frac{2\cos^2\frac{B-C}{2}-1}{-2\cos^2\frac{B+C}{2}+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}=-2\cos^2\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)-2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\left(2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}(\cos B+\cos C-1)=0$$

Do $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\neq 0$ nên $\boxed{\cos B+\cos C=1}$

2. Biết $k=\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$

Do đó ta có hệ: $\begin{cases}\cos B+\cos C=1 & (1)\\ \sin B=k\sin C & (2)\end{cases}$ (k>0)

. Nếu k = 1 thì $\sin B=\sin C \Rightarrow B=C$

Khi đó (1) $\Rightarrow 2\cos B = 1 \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = C = 60^0$

. Với $k \neq 1$, giả sử $b > c$, từ (2) suy ra:

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 B = k^2\sin^2 C$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2 B = k^2(1 - \cos^2 C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - (1 - \cos C)^2 = k^2 - k^2\cos^2 C$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos C - \cos^2 C = k^2 - k^2\cos^2 C$$

$$\Leftrightarrow \quad (k^2 - 1)\cos^2 C + 2\cos C - k^2 = 0 \qquad (3)$$

Đặt $\cos C = t \qquad 0 < t < 1$

Vì $k > 1$ nên phương trình (3) có tích $(k^2-1)k^2 < 0$ nên (3) luôn có hai nghiệm trái dấu. Nếu $t_1 < 0$ thì $t_2 \in (0,1)$

Gọi α là góc nhọn mà $\cos\alpha = t_2 \Rightarrow C = \alpha$

Gọi β là góc nhọn mà $\cos\beta = 1 - t_2 \Rightarrow B = \beta$.

BÀI 11

Cho tam giác ABC, a = BC, b = CA, c = AB. Chứng minh rằng tam giác ABC là cân nếu:

$$a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = c^2\cot g\frac{C}{2}$$

Đại học Tổng hợp Hà Nội (1986)

GIẢI

Ta có: $$a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = c^2\cot g\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Biết $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$ nên (1) có thể viết:

$$\sin^2 A\sin 2B + \sin^2 B\sin 2A = \sin^2 C\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 A\sin B\cos B + 2\sin^2 B\sin A\cos A = \sin^2 C\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin A\sin B(\sin A\cos B + \sin B\cos A) = \sin^2 C\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin A\sin B\sin(A+B) = \sin^2 C\cot g\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Vì $C = \pi - (A+B) \Rightarrow \sin C = \sin(A+B)\ (\neq 0)$

nên (2) $\Leftrightarrow\ 2\sin A\ \sin B = \sin C\cot g\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = 2\cos^2\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A-B) + \cos C = 1 + \cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A-B) = 1$$

Vì A, B là các góc của tam giác nên $A - B = 0$ hay $A = B$. Vậy ΔABC là tam giác cân.

BÀI 12

Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến, AD là phân giác trong của góc A.

Đặt $\widehat{MAB} = \beta$; $\widehat{MAC} = \gamma$ **và** $\widehat{MAD} = \alpha$

a/ Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$

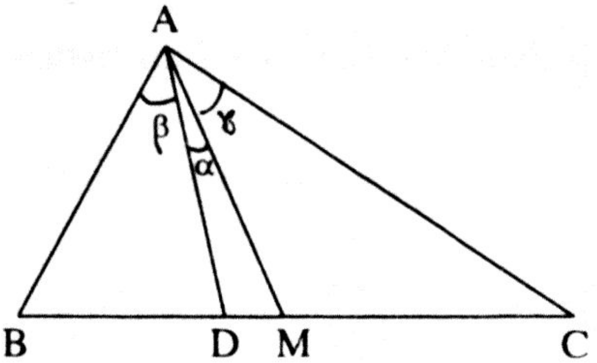
b/ Giả sử AC ≥ AB. Chứng minh rằng: $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2}.\operatorname{tg}\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$

Đại học Tổng hợp Hà Nội (1987, A)

GIẢI

a/ Chứng minh:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin B}{\sin C}$$



Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{BM}{\sin\beta} = \dfrac{AM}{\sin B} & (1) \\ \dfrac{CM}{\sin\gamma} = \dfrac{AM}{\sin C} & (2) \end{cases}$$

(1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$

b/ Giả sử AC ≥ AB. Chứng minh $\text{tg}\alpha = \text{tg}^2\dfrac{A}{2}.\text{tg}\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$

Ta có:

$$\begin{cases} \beta - \alpha = \dfrac{A}{2} \\ \gamma + \alpha = \dfrac{A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A}{2} = \dfrac{\beta+\gamma}{2} \\ \alpha = \dfrac{\beta-\gamma}{2} \end{cases}$$

Theo câu (a) ta có:

$$\frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin B - \sin C}{\sin\beta - \sin\gamma} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin\beta + \sin\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}}{2\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}.\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{2\sin\dfrac{B+C}{2}.\cos\dfrac{B-C}{2}}{2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}.\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \text{tg}^2\frac{\beta+\gamma}{2}\text{tg}\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\alpha = \text{tg}^2\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B-C}{2}$$

Bài 13

Cho biểu thức $U = \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C - 2$ trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy chứng minh : U> 0 nếu tam giác ABC là nhọn , U < 0 nếu tam giác ABC là tù , U = 0 nếu tam giác ABC là vuông.

Đại học Xây dựng Hà Nội (1988)

GIẢI

Ta có : $U = \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C - 2 \qquad (1)$

Biết $\cos2A = 1 - 2\sin^2 A \Rightarrow \sin^2 A = \dfrac{1-\cos2A}{2}$ nên (1) có thể biến đổi thành :

$$U = \frac{(1-\cos2A)+(1-\cos2B)}{2} + 1 - \cos^2 C - 2$$

$$= \frac{-(\cos2A+\cos2B)}{2} - \cos^2 C$$

Vì $A + B + C = \pi \Rightarrow C = \pi - (A+B)$

nên $\cos C = -\cos(A+B)$

$$\Rightarrow U = -\cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2(A+B)$$

$$= -\cos(A+B)[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$= \cos C.2\cos A\cos B$$

$$= 2\cos A\cos B\cos C$$

Do đó suy ra:

* $U > 0 \Rightarrow \cos A\cos B\cos C > 0$ nếu các góc A, B, C là nhọn , tức tam giác ABC là nhọn

* $U < 0 \Rightarrow \cos A\cos B\cos C < 0$ nếu một góc là tù , tức tam giác ABC là tù

* $U = 0 \Rightarrow \cos A\cos B\cos C = 0$ nếu một góc là vuông , tức tam giác ABC là vuông

BÀI 14 - 15

Gọi các cạnh của một tam giác a, b, c; các chiều cao tương ứng là h_a, h_b, h_c; các bán kính đường tròn bàng tiếp tương ứng là r_a, r_b, r_c; bán kính đường tròn nội tiếp là r. Chứng minh:

1/ $4r.r_a \le a^2$

2/ $r_a + r_b + r_c \ge h_a + h_b + h_c$

Đại học xây dựng Hà Nội (1990)

GIẢI

1/ Chứng minh: $4r.r_a \le a^2$

Trong tam giác với r, r_a, S là bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp và diện tích, ta có:

$$r = (p - a)\,\text{tg}\,\frac{A}{2}$$

$$S = pr \quad \Rightarrow \quad r = \frac{S}{p}$$

$$S = (p-a)r_a \;\Rightarrow\; r_a = \frac{S}{p-a}$$

Do đó:
$$rr_a = \frac{S^2}{p(p-a)}$$

$$= \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$

$$= (p\text{-}b)(p\text{-}c) \le \left[\frac{(p-b)+(p-c)}{2}\right]^2 = \frac{a^2}{4}$$

Vậy: $4rr_a \le a^2$

2/ Biết $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

$$\Rightarrow \quad r_a = \frac{S}{p-a}\,;\; r_b = \frac{S}{p-b}\,;\; r_c = \frac{S}{p-c}$$

Do đó:
$$r_a + r_b = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} \ge \frac{2S}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} \qquad (1)$$

Ta cũng có: $\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \left(\frac{p-a+p-b}{2}\right) = \frac{c}{2}$

và $S = \frac{1}{2}ch_C \Rightarrow \frac{c}{2} = \frac{S}{h_c}$

Từ (1) $\Rightarrow$ $$r_a + r_b \ge \frac{2S}{\frac{S}{h_c}} = 2h_c \qquad (2)$$

Tương tự $$r_b + r_c \ge 2h_a \qquad (3)$$

$$r_a + r_c \ge 2h_b \qquad (4)$$

Cộng (2), (3) và (4) từng vế một, ta được:

$r_a + r_b + r_c \ge h_a + h_b + h_c$ (đpcm).

BÀI 16

Gọi A, B, C là 3 góc của một tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$4\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right] = 1$$

Chứng minh ΔABC đều.

GIẢI

Ta có: $$4\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -4\sin^2\frac{A}{2} + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(4\sin^2\frac{A}{2} - 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + \cos^2\frac{B-C}{2}\right) + \left(1 - \cos^2\frac{B-C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[2\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right]^2 + \left[1 - \cos^2\frac{B-C}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{B-C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2} & (1) \\ \cos^2\frac{B-C}{2} = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow B = C$ và từ (1) $\Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 30^0 \Leftrightarrow A = 60^0$

(Vì $0^0 < \frac{A}{2} < 90^0$)

Do đó suy ra tam giác ABC là tam giác đều.

BÀI 17

Tam giác ABC có tính chất gì nếu biết:

$$\mathbf{atgB + btgA = (a + b)tg\frac{A + B}{2}}$$

với a, b, c là độ dài ba cạnh đối diện với ba góc A, B, C

Đại học Nông Lâm TP. Hồ Chí Minh (1991)

GIẢI

Ta có: $a\text{tg}B + b\text{tg}A = (a + b)\text{tg}\frac{A+B}{2}$

$$= a\text{tg}\frac{A+B}{2} + b\text{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$a\text{tg}B - a\text{tg}\frac{A+B}{2} = b\text{tg}\frac{A+B}{2} - b\text{tg}A$$

$$a\left(\text{tg}B - \text{tg}\frac{A+B}{2}\right) = b\left(\text{tg}\frac{A+B}{2} - \text{tg}A\right) \quad (1)$$

Biết $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$

$$(1) \Rightarrow 2R\sin A\frac{\sin\left(B - \frac{A+B}{2}\right)}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}} = 2R\sin B\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2} - A\right)}{\cos\frac{A+B}{2}\cos A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin A \sin \frac{B-A}{2}}{\cos B} = \frac{\sin B \sin \frac{B-A}{2}}{\cos A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A \cos A \sin \frac{B-A}{2} = \sin B \cos B \sin \frac{B-A}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2A \sin \frac{B-A}{2} - \sin 2B \sin \frac{B-A}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin \frac{B-A}{2} (\sin 2A - \sin 2B) = 0$$

. Với $\sin \frac{B-A}{2} = 0 \Leftrightarrow B - A = 0 \Leftrightarrow A = B$

Khi đó ΔABC là tam giác cân tại đỉnh C.

. Với $\sin 2A - \sin 2B = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A + B)\sin(A - B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C \sin(A - B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos C = 0 \\ \sin(A - B) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 90^0 \\ A = B \end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC có thể làm tam giác vuông đỉnh C.

BÀI 18

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}} < 2$$

Đại học Tổng hợp Hà Nội

GIẢI

Ta có: $$\frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}} < 2 \qquad (1)$$

Biết A, B, C $< \pi$ nên $\frac{A}{2}$; $\frac{B}{2}$ và $\frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$

suy ra $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} > 0$

(1) có thể viết:

$$\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right) + \left(\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) +$$

$$+\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\right) > 0 \qquad (2)$$

Tính: $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} - \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} - \sin\frac{A+B}{2}$

$$= \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} - \left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\right)$$

Ví $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2} < \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}$ nên:

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} - \cos\frac{C}{2} > 0$$

Tương tự: $\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A}{2} > 0$

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2} > 0$$

Do đó (2) luôn đúng với mọi tam giác ABC.

BÀI 19

Chứng tỏ rằng trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot g^2 A + \cot g^2 B)$$

Đại học Tài chính Kế toán TP. HCM.

GIẢI

Ta có: $$\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}(\cot g^2 A+\cot g^2 B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\sin^2 A+1-\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}(\cot g^2 A+1+\cot g^2 B+1)-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2-\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sin^2 A+\sin^2 B}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin^2 A+\sin^2 B)\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)=4$$

Vì $\sin A > 0$, $\sin B > 0$ nên theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sin^2 A+\sin^2 B \ge 2\sin A\sin B$$

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\ge\frac{2}{\sin A\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin^2 A+\sin^2 B)\left(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\right)\ge 4$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sin^2 A=\sin^2 B \Leftrightarrow A=B$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại đỉnh C.

BÀI 20

Tam giác ABC có các góc và các cạnh thoả hệ thức:

$$\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$$

Chứng minh ABC là tam giác cân

Đại học Kinh tế TP. Hồ Chí Minh

GIẢI

Ta có: $$\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1+\cos B)^2}{1-\cos^2 B} = \frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c} \qquad (2)$$

Biết $a = 2R\sin A$ và $c = 2R\sin C$ nên (2):

$$\frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2R(2\sin A+\sin C)}{2R(2\sin A-\sin C)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+\cos B)(2\sin A-\sin C) = (1-\cos B)(2\sin A+\sin C)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin A\cos B-\sin C-\sin C\cos B=-2\sin A\cos B+\sin C-\sin C\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin A\cos B - 2\sin C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin A\cos B - \sin C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A+B) + \sin(A-B) - \sin C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A-B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A - B = k\pi \ (k \in Z)$$

Vì A và B là các góc của tam giác nên $k = 0 \Rightarrow A = B$

Vậy tam giác ABC là tam giác cân.

NHỮNG ĐỀ LƯỢNG GIÁC THI ĐẠI HỌC–CAO ĐẲNG TRONG TOÀN QUỐC TỪ NĂM 1992 ĐẾN NĂM 2000-2001

I. TAM GIÁC THƯỜNG :

Bài 1

Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng $A = 2B$ khi và chỉ khi $a^2 = b(b + c)$

Đại học Ngân hàng (1992)

GIẢI

Theo giả thiết : $a^2 = b(b + c)$ (1)

Theo định lí hàm số cosin ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + bc$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 - 2bc\cos A = bc$$

$$\Leftrightarrow \quad c - 2b\cos A = b$$

$$\Leftrightarrow \quad c - b = 2b\cos A \quad (3)$$

Thay $c = 2R\sin C$ và $b = 2R\sin B$ vào (3) ta được:

$$2R(\sin C - \sin B) = 4R\sin B\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C - \sin B = 2\sin B\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C - \sin B = \sin(B + A) + \sin(B - A) \quad (4)$$

$B + A$ và C là hai góc bù nhau nên $\sin C = \sin(B + A)$. Do đó, từ (4) ta có:

$$(4) \Leftrightarrow -\sin B = \sin(B - A)$$

$$\Leftrightarrow \sin(-B) = \sin(B - A) \Leftrightarrow A = 2B$$

BÀI 2

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2$$

Đại học Ngoại thương

GIẢI

Ta cần chứng minh: $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2$ (1)

Mẫu số: $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) + 1$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 > 0$$

Do mẫu $\cos A + \cos B + \cos C > 0$ nên bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$\sin A + \sin B + \sin C < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$$

Biết $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} > 0$ và $0 < \sin C \le 1$

nên $\cos A + \cos B \ge \sin C\cos A + \sin C\cos B$ (2)

Tương tự:

$\cos B + \cos C \ge \sin A\cos B + \sin A\cos C$ (3)

$\cos C + \cos A \ge \sin B\cos C + \sin B\cos A$ (4)

Cộng (2), (3) và (4) vế với vế ta có:

$2(\cos A + \cos B + \cos C) \ge \sin(B + C) + \sin(A + C) + \sin(A + B)$

$$= \quad \sin A \quad + \quad \sin B \quad + \sin C$$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi đồng thời sinA = 1, sinB = 1, sinC = 1 nghĩa là một tam giác có 3 góc vuông, điều này không xảy ra, vậy:

$$2(\cos A + \cos B + \cos C) > \sin A + \sin B + \sin C$$

BÀI 3

1. **Giải phương trình:** $\sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x = \frac{1}{4}$ **(1)**
2. **Tìm tất cả các nghiệm của phương trình (1) thoả mãn:**

$$\sqrt{2}\cos 2x - \sin 4x \le 0$$

Đại học Bách khoa TP. Hồ Chí Minh. (1995)

GIẢI

1. Ta có: $\sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x = \frac{1}{4}$ (1)

$$\Leftrightarrow \sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin 4x = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = -1$$

$$\Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}} \quad (k \in Z)$$

2. Ta có: $\sqrt{2}\cos 2x - \sin 4x \le 0$

$$\sqrt{2}\cos 2x - 2\sin 2x\cos 2x \le 0$$

$$\cos 2x\,(\sqrt{2} - 2\sin 2x) \le 0 \qquad (2)$$

Với nghiệm của (1):

$$2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

thế vào (2) ta có:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\left[\sqrt{2} - 2\sin\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right] \qquad (3)$$

Với k = 0, 2, 4... chẵn suy ra (3) = $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2} + \sqrt{2}\right] > 0$ không thoả mãn (2).

Với k = 1, 3, 5... lẻ suy ra (3) thoả mãn (2) với dấu =.

Vậy nghiệm của (1) thoả mãn (2) là $\boxed{x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}}$ với $k \in Z$ và k lẻ.

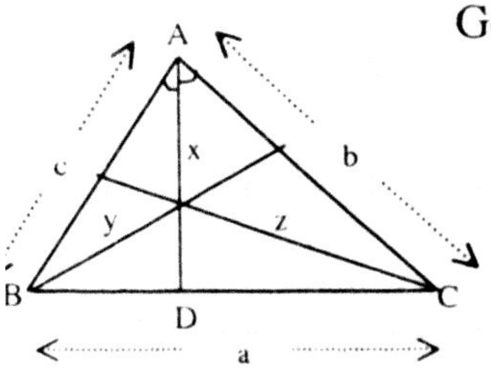
BÀI 4

Tam giác ABC có các góc đều nhọn, có các cạnh a, b, c và x, y, z là độ dài của các đường phân giác tương ứng.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Đại học Văn Lang TP. Hồ Chí Minh (1995)

GIẢI



Gọi S là diện tích tam giác ABC, ta có:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cx\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bx\sin\frac{A}{2}$$

$$= \frac{1}{2}x(c+b)\sin\frac{A}{2}$$

Từ đó suy ra:

$$2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = x(c+b)\sin\frac{A}{2}$$

hay $$x = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} < \frac{2bc}{b+c}$$

Suy ra: $$\frac{1}{x} > \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \quad (1)$$

Tương tự: $$\frac{1}{y} > \frac{a+c}{2ac} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{z} > \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

BÀI 5

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có hệ thức:

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C = 2\sin B\sin C\cos A+2\sin C\sin A\cos B +2\sin A\sin B\cos C$$

Đại học Giao thông (1995)

GIẢI

Ta có:

$$\begin{aligned}2\sin B\sin C\cos A + 2\sin A\sin B\cos C &= 2\sin B(\sin C\cos A+ \sin A\cos C)\\ &= 2\sin B.\sin(A + C)\\ &= 2\sin^2B \quad (1)\end{aligned}$$

Tương tự:

$$\begin{aligned}2\sin A\sin B\cos C+2\sin C\sin A\cos B &= 2\sin A(\sin B\cos C + \sin C\cos B)\\ &= 2\sin A.\sin(B + C)\\ &= 2\sin^2A \quad (2)\end{aligned}$$

$$2\sin C\sin A\cos B + 2\sin C\sin B\cos A = 2\sin C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$$

$$= 2\sin C.\sin(A + B)$$

$$= 2\sin^2 C \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế ta có:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C = 2\sin B\sin C\cos A+ 2\sin C\sin A\cos B+ 2\sin A\sin B\cos C$$

BÀI 6

Chứng minh rằng ba góc A, B, C của một tam giác thoả mãn điều kiện:

$$\mathbf{\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - 4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}}$$

Đại học Kiến trúc Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - \sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$

Biến đổi vế trái của đẳng thức cần chứng minh:

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C = 2\cos\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2}+\left(1-2\sin^2\frac{3C}{2}\right)$$

Biết $A + B = \pi - C$

$\Rightarrow \quad 3A + 3B = 3\pi - 3C = 2\pi + (\pi - 3C)$

$\Rightarrow \quad \frac{3A+3B}{2} = \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \cos\frac{3A+3B}{2} = \cos\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)\right]$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)$$

$$= -\sin\frac{3C}{2}$$

Do đó:

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = -2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}$$

$$= 1 - 2\sin\frac{3C}{2}\left(\cos\frac{3A-3B}{2} + \sin\frac{3C}{2}\right)$$

$$= 1 - 2\sin\frac{3C}{2}\left(\cos\frac{3A-3B}{2} - \cos\frac{3A+3B}{2}\right)$$

$$= 1 - 2\sin\frac{3C}{2}\left[-2\sin\frac{3A}{2}\sin\left(\frac{-3B}{2}\right)\right]$$

$$= 1 - 4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2} \quad \text{(đpcm)}$$

Chú ý: $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

BÀI 7

a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác với chu vi 2p. Chứng minh rằng:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8}$$

Đại học Luật TP. Hồ Chí Minh (1995)

GIẢI

Chứng minh:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8}$$

. Biết $p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} > 0$

$p - b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2} > 0$

$$p - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi với ba số dương (p–a), (p–b) và (p–c), ta có:

$$(p-a)(p-b) \le \left[\frac{(p-a)+(p-b)}{2}\right]^2 = \frac{c^2}{4} \qquad (1)$$

$$(p-b)(p-c) \le \left[\frac{(p-b)+(p-c)}{2}\right]^2 = \frac{a^2}{4} \qquad (2)$$

$$(p-c)(p-a) \le \left[\frac{(p-c)+(p-a)}{2}\right]^2 = \frac{b^2}{4} \qquad (3)$$

Nhân vế với vế (1), (2) và (3) ta có:

$$(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 \le \frac{c^2a^2b^2}{64}$$

Hạ bậc hai vế suy ra:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8} \quad \text{(đpcm)}$$

Chú ý:

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ (nửa chu vi)}$$

$\frac{b+c-a}{2} > 0$ (tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba).

BÀI 8

Gọi R và r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh:

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Đại học Ngoại ngữ Hà Nội (1995)

GIẢI

Trong tam giác ABC ta có: $S = pr = \frac{1}{2}bc\sin A$ suy ra:

$$r = \frac{bc\sin A}{a+b+c} = \frac{2R\sin B.(2R\sin C)\sin A}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right).2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{8R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

BÀI 9

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > 2$$

Học viện Quan hệ Quốc tế (1995)

GIẢI

Bất đẳng thức:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > 2$$

Do $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ là các góc nhọn nên

$$0 < \cos\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2} < 1$$

Suy ra: $\cos\frac{A}{2} > \cos^2\frac{A}{2}$

$$\cos\frac{B}{2} > \cos^2\frac{B}{2}$$

$$\cos\frac{C}{2} > \cos^2\frac{C}{2}$$

Cộng vế với vế, ta được:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1+\cos A}{2} + \frac{1+\cos B}{2} + \frac{1+\cos C}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) \quad (1)$$

Theo bài trên, ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1$$

nên từ (1) ta suy ra:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \text{ (đpcm).}$$

BÀI 10

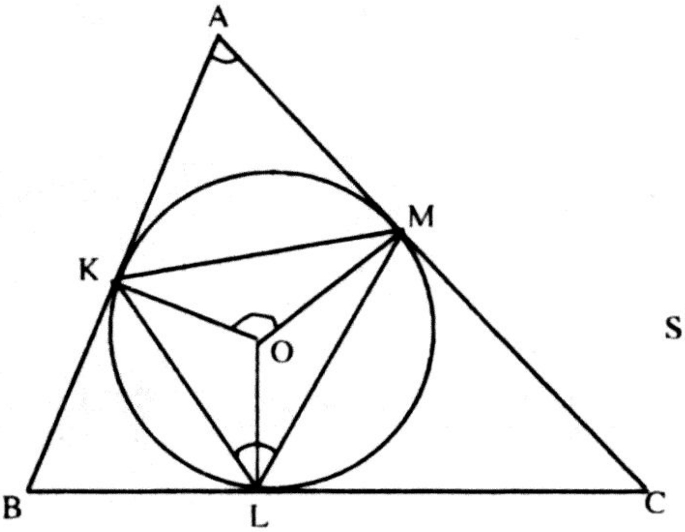
Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA, lần lượt tại K, L, M. Gọi S là diện tích tam giác ABC, s là diện tích tam giác KLM. Chứng minh rằng:

$$s = 2S\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Học viện Quan hệ Quốc tế (1995)

GIẢI

Ta có: OK = OM = OL = r = bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, nhưng với tam giác KLM thì r lại là bán kính đường tròn ngoại tiếp



$$\widehat{KOM} = \pi - A$$

$$\widehat{KLM} = \frac{1}{2}\widehat{KOM} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

nên

$$\sin\widehat{KLM} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

Trong tam giác KLM theo định lý hàm số sin, ta có:

$$\frac{KM}{\sin\widehat{KLM}} = 2r \text{ hay } KM = 2r\sin\widehat{KLM} = 2r\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= (b+c-a)\sin\frac{A}{2}$$

Do đó $\dfrac{KM}{BC} = \dfrac{(b+c-a)\sin\frac{A}{2}}{a}$

$$= \frac{(\sin B + \sin C - \sin A)}{\sin A}\sin\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{A}{2}$$

$$\frac{KM}{BC} = \cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Tương tự : $\frac{ML}{BA} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$ (2)

Nhân (1) và (2) từng vế một ta có:

$$\frac{KM.ML}{BC.BA} = 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \qquad (3)$$

Biết $s = \frac{1}{2}KM.KL.\sin\widehat{KML} = \frac{1}{2}KM.KL.\cos\frac{B}{2}$

$$\Rightarrow \qquad KM.KL = \frac{2s}{\cos\frac{B}{2}} \qquad (4)$$

dt $\Delta ABC =$ $S = \frac{1}{2}BC.BA.\sin B$ suy ra : $BC.BA = \frac{2S}{\sin B}$ (5)

Thế (4) và (5) vào vế trái của (3) và rút gọn ta được :

$$s = 2S\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Bài 11

Giả sử A, B, C là ba góc của một tam giác và x, y, z là các số dương. Chứng minh: $\frac{1}{x}\cos A + \frac{1}{y}\cos B + \frac{1}{z}\cos C \le \frac{x}{2yz} + \frac{y}{2xz} + \frac{z}{2xy}$

Đại học Mỏ-Địa chất TP. Hồ Chí Minh (2001)

GIẢI

Chứng minh:

$$\frac{1}{x}\cos A + \frac{1}{y}\cos B + \frac{1}{z}\cos C \le \frac{x}{2yz} + \frac{y}{2xz} + \frac{z}{2xy} \qquad (1)$$

Từ (1) $\Rightarrow$ $2yz\cos A + 2xz\cos B + 2xy\cos C \le x^2 + y^2 + z^2$

$\Leftrightarrow x^2(\sin^2 B+\cos^2 B)+ y^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+z^2 \ge 2z(y\cos A+x\cos B)+2xy\cos C$

$\Leftrightarrow x^2\sin^2 B + x^2\cos^2 B + y^2\sin^2 A + y^2\cos^2 A + z^2 \ge 2z(y\cos A + x\cos B)$
$- 2xy\cos(A+B)$

$\Leftrightarrow x^2\cos^2 B + y^2\cos^2 A + x^2\sin^2 B + y^2\sin^2 A + z^2 \ge 2z(y\cos A+x\cos B)$
$- 2xy(\cos A\cos B - \sin A\sin B)$

$\Leftrightarrow (x\cos B + y\cos A)^2 + (x\sin B - y\sin A)^2 + z^2 - 2z(y\cos A+x\cos B) \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (x\cos B + y\cos A - z)^2 + (x\sin B - y\sin A)^2 \ge 0$ (2)

(2) luôn đúng nên (1) đúng.

Dấu " = " xảy ra khi : $\frac{\sin A}{x} = \frac{\sin B}{y} = \frac{\sin C}{z}$

BÀI 12

Cho tam giác ABC với diện tích là S và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}$$

Đại học Ngoại ngữ Hà Nội

GIẢI

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$$= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$$

$$= 2\sin C[\cos(A-B) + \cos C]$$

$$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= 4\sin A.\sin B.\sin C \qquad (1)$$

Theo định lý hàm số sin ta có:

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

Do đó, từ (1) ta có:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4.\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}\sin C = \frac{2S}{R^2} \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI 13

Ký hiệu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác và $p = \frac{a+b+c}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$$

Học viện Kỹ thuật Quân sự (1996)

GIẢI

Với x, y, z > 0, ta có:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$$

nên $(x + y + z)^2 > x^2 + y^2 + z^2$

$$\Rightarrow \quad x + y + z > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Với ba số dương p – a , p – b ; p – c ta có:

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} > \sqrt{\left(\sqrt{p-a}\right)^2 + \left(\sqrt{p-b}\right)^2 + \left(\sqrt{p-c}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3p - (a + b + c)}$$

$$= \sqrt{3p - 2p}$$

$$= \sqrt{p}$$

Chứng minh:

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$\left(1\sqrt{p-a} + 1\sqrt{p-b} + 1\sqrt{p-c}\right)^2 \le (1^2+1^2+1^2)(p-a + p-b+ p-c)$$

$$= 3[3p - (a + b + c)]$$

$$= 3p$$

Hạ bậc hai vế của bất đẳng thức này ta có:

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$$

BÀI 14

Gọi m_a , m_b , m_c là độ dài các đường trung tuyến, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$m_a.m_b.m_c \le \frac{27R^3}{8}$$

Đại học Ngoại thương (1996)

GIẢI

Theo công thức đường trung tuyến trong tam giác ta có:

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \quad \text{hay} \quad 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \qquad (1)$$

$$a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2m_b^2 \quad \text{hay} \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \qquad (2)$$

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2m_c^2 \quad \text{hay} \quad 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \qquad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế với vế, ta có:

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 3(4R^2\sin^2 A + 4R^2\sin^2 B + 4R^2\sin^2 C)$$

$$= 3.\ 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$\Leftrightarrow \quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \qquad (4)$$

Ta chứng minh $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$ (5)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C \le \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-(\cos 2A + \cos 2B)}{2} - \cos^2 C \le \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2 C \le \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 C - \cos C\cos(A - B) + \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 C - \cos(A - B)\cos C + \frac{1}{4} \ge 0$$

Vế trái là tam thức bậc hai với cosC, tam thức này có

$\Delta = \cos^2(A - B) - 1 \le 0$ nên tam thức luôn luôn ≥ 0 suy ra (5) luôn đúng.

Thế giá trị của $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$ ở (5) vào (4) ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27R^2}{4} \qquad (6)$$

Nhưng $\quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt[3]{m_a^2 m_b^2 m_c^2} \qquad (7)$

Từ (6) và (7) ta suy ra:

$$3\sqrt[3]{m_a^2 m_b^2 m_c^2} \leq \frac{27R^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{m_a^2 m_b^2 m_c^2} \leq \frac{9R^2}{4} \qquad (8)$$

Lập phương hai vế (8) ta có: $\quad m_a^2 m_b^2 m_c^2 \leq \frac{9^3 R^6}{4^3} = \frac{3^6 R^6}{2^6}$

$$\Rightarrow \quad m_a m_b m_c \leq \frac{27R^3}{8} \quad \text{(đpcm)}$$

BÀI 15.

Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\sin A.\sin B.\sin C \leq \sin\frac{A+3B}{4}\sin\frac{B+3C}{4}\sin\frac{C+3A}{4}$$

Học viện Quan hệ Quốc tế (1996)

GIẢI

Trong mọi tam giác ta đều có: $0 < A, B, C < \pi$

Do đó: $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leq 2\sin\frac{A+B}{2}$

hay $\quad \frac{1}{2}(\sin A + \sin B) \leq \sin\frac{A+B}{2} \qquad (1)$

Dấu "=" xảy ra khi $\cos\frac{A-B}{2} = 1$ suy ra $A = B$

Từ (1) ta suy ra:

$$\frac{1}{4}(\sin A + \sin B) \leq \frac{1}{2}\sin\frac{A+B}{2} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{4}(\sin B + \sin B) \leq \frac{1}{2}\sin\frac{B+B}{2} \qquad (3)$$

Cộng vế với vế (2) và (3) ta có: .

$$\frac{1}{4}(\sin A + 3\sin B) \le \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{2B}{2}\right) \le \sin\frac{A+3B}{4} \qquad (4)$$

Từ (4) ta suy ra:

$$\sqrt[4]{\sin A \sin^3 B} \le \sin\frac{A+3B}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A.\sin^3 B \le \left(\sin\frac{A+3B}{4}\right)^4 \qquad (6)$$

Tương tự ta có:

$$\sin B.\sin^3 C \le \left(\sin\frac{B+3C}{4}\right)^4 \qquad (7)$$

$$\sin C.\sin^3 A \le \left(\sin\frac{C+3A}{4}\right)^4 \qquad (8)$$

Nhân (6), (7) và (8) vế với vế (đều dương) ta có:

$$\sin^4 A \sin^4 B \sin^4 C \le \left(\sin\frac{A+3B}{4}\right)^4 \left(\sin\frac{B+3C}{4}\right)^4 \left(\sin\frac{C+3A}{4}\right)^4$$

$$\Rightarrow \sin A.\sin B.\sin C \le \sin\frac{A+3B}{4}\sin\frac{B+3C}{4}\sin\frac{C+3A}{4} \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI 16

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\mathbf{cotgA + cotgB + cotgC = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}}$$

Đại học Văn hoá T.P. Hồ Chí Minh (1996)

GIẢI

Theo định lý hàm số côsin ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad (1)$$

Từ công thức tính diện tích tam giác $S = \frac{1}{2} bc\sin A$, ta có:

$$\sin A = \frac{2S}{bc} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\text{cotg}A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\dfrac{2S}{bc}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\left(\dfrac{abc}{4R}\right)} = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc} \qquad (3)$$

Tương tự, ta có:

$$\text{cotg}B = \frac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc} \qquad (4)$$

$$\text{cotg}C = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc} \qquad (5)$$

Cộng vế với vế (3), (4) và (5) ta có:

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

Cách khác $\text{cotg}A = \frac{\cos A}{\sin A}$ (6)

Có thể sử dụng định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Suy ra $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ rồi thay vào mẫu ở (6):

$\text{cotg}A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \dfrac{a}{2R} = \dfrac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$ ta cũng được kết quả tương tự.

BÀI 17

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Gọi a, b, c lần lượt là các cạnh đối diện với các góc A, B, C.

Chứng tỏ rằng: $b^2 + c^2 > a^2$

Đại học Y Dược T.P. Hồ Chí Minh (1996)

GIẢI

Tam giác ABC có 3 góc nhọn, do đó $\cos A > 0$

Theo định lý hàm số cosin ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A < b^2 + c^2$$

hay $b^2 + c^2 > a^2$

BÀI 18

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác bất kỳ, S là diện tích của tam giác đó. Chứng minh:

$$S^2 \le \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + c^4)$$

Đại học Y Dược T.P. Hồ Chí Minh (1996)

GIẢI

Theo công thức Hêrông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Suy ra: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

$$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}[(b+c+a)(b+c-a)(a+c-b)[a-(c-b)]]$$

$$= \frac{1}{16}[(b+c)^2 - a^2][a^2-(c-b)^2] \leq \frac{1}{16}[(b+c)^2-a^2]a^2$$

$$= \frac{1}{16}(b^2 + c^2 + 2bc - a^2)a^2$$

$$\leq \frac{1}{16}(2b^2 + 2c^2 - a^2)a^2$$

$$= \frac{1}{16}(2b^2a^2 + 2c^2a^2 - a^4)$$

$$\leq \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + a^4 + c^4 - a^4) = \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + c^4) \text{ (đpcm)}$$

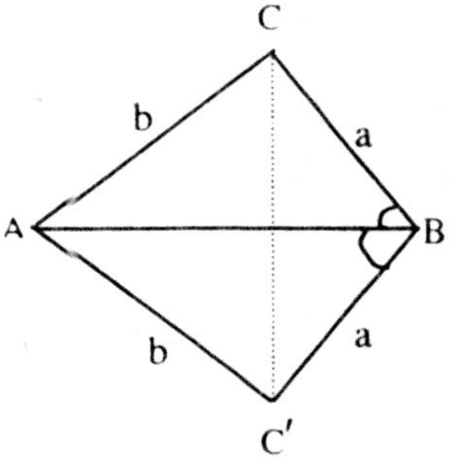
BÀI 19

Chứng tỏ rằng có thể tính diện tích tam giác ABC bởi công thức:

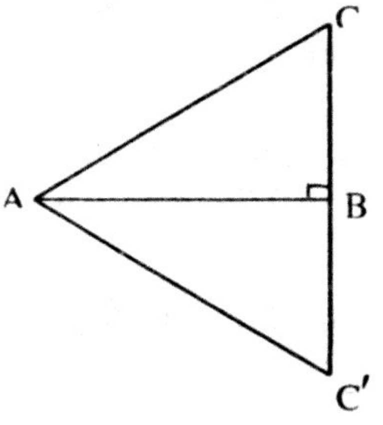
$$S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$$

Trung tâm Đào tạo bồi dưỡng Cán bộ Y tế (1996)

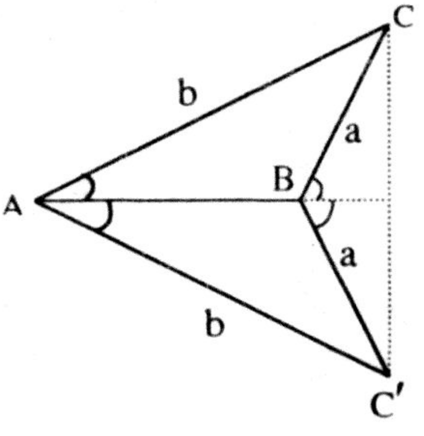
GIẢI



(1)



(2)



(3)

Dựng tam giác ABC' có các tính chất sau:

$$AC = AC' = b$$

$$BC = BC' = a$$

$$\widehat{BAC} = B\widehat{A}C' = A$$

$$\widehat{ABC} = A\widehat{B}C' = B$$

Trường hợp góc B nhọn hay vuông (hình 1 và 2)

$$\text{dt } \Delta ABC = \frac{1}{2}\text{dt tứ giác } ACBC'$$

$$= \frac{1}{2}(\text{dt } \Delta CAC' + \text{dt } \Delta CBC')$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b^2\sin 2A + \frac{1}{2}a^2\sin 2B\right) = \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right)$$

Trường hợp góc B tù (hình 3):

$$2\text{dt } \Delta ABC = \text{dt } \Delta ACC' - \text{dt } \Delta BCC'$$

$$= \frac{1}{2}b^2\sin 2A - \frac{1}{2}a^2\sin(2\pi - 2B)$$

$$= \frac{1}{2}b^2\sin 2A - \frac{1}{2}a^2\sin(-2B)$$

$$= \frac{1}{2}b^2\sin 2A - \frac{1}{2}a^2(-\sin 2B)$$

$$= \frac{1}{2}b^2\sin 2A + \frac{1}{2}a^2\sin 2B$$

$$\Rightarrow \text{dt } \Delta ABC = \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right)$$

BÀI 20

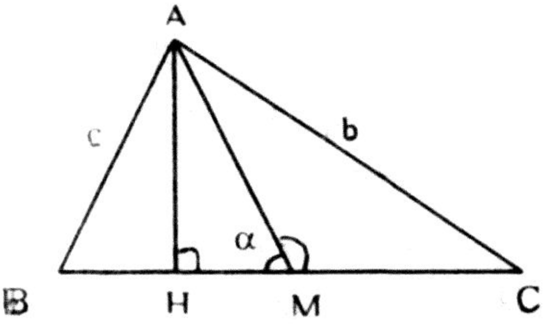
Cho tam giác ABC với AM là trung tuyến, góc $\widehat{AMB} = \alpha$, AB = c ; AC = b và S là diện tích của tam giác ABC.

a. Chứng minh $\cot g\alpha = \dfrac{b^2 - c^2}{4S}$

b. Cho $\alpha = 45^0$. Chứng minh cotgC − cotgB = 2.

Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh (1996, Luật)

GIẢI



a. Trong tam giác ABC gọi AH là đường cao từ đỉnh A, ta có:

$$AC^2 - AB^2 = 2BC.HM$$

(giả sử AC > AB)

$$\Leftrightarrow b^2 - c^2 = 2BC.\ HM$$

$$\Rightarrow HM = \frac{b^2 - c^2}{2BC}$$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}AH.BC \Rightarrow AH = \frac{2S}{BC}$$

Trong tam giác AHM, ta có:

$$\cot g\alpha = \frac{HM}{AH} = \frac{\dfrac{b^2 - c^2}{2BC}}{\dfrac{2S}{BC}} = \frac{b^2 - c^2}{4S}$$

b. Với $\alpha = 45^0$ thì tam giác AHM vuông cân nên AH = HM

Trong tam giác AHC ta có $\cot gC = \dfrac{HC}{AH}$

Trong tam giác AHB ta có $\cot gB = \dfrac{BH}{AH}$

Do đó:

$$\cot gC - \cot gB = \frac{HC - BH}{AH} = \frac{(HM + MC) - (BM - HM)}{AH} = \frac{2HM}{AH}$$

Vì HM = AH nên cotgC − cotgB = 2.

BÀI 21

Chứng minh ràng trong mọi tam giác ABC, ta luôn có:

$$\mathbf{\cos A + \cos B + \cos C \geq 12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

Đại học Mỏ - Địa chất (1996, A)

GIẢI

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\cos A + \cos B + \cos C - 12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$-12\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$-6\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} - 6\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + 6\sin^2\frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 \geq 0 \qquad (2)$$

Đây là tam thức bậc hai đối với $\sin\frac{C}{2}$ có :

$\Delta' = 4\cos^2\dfrac{A-B}{2} - 4 \le 0$, hệ số a = 4 > 0 nên (2) luôn đúng, hay bất đẳng thức (1) đúng (đpcm).

BÀI 22

Chứng minh trong tam giác ABC bất kỳ, ta có:

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$$

Đại học An ninh (1996, A)

GIẢI

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - \frac{3}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} + \cos\frac{A+B}{2} - 1 - \frac{1}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} - \left(1 - \cos\frac{A+B}{2}\right) - \frac{1}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} - 2\sin^2\frac{A+B}{4} - \frac{1}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\sin^2\frac{A+B}{4} + 2\cos\frac{A-B}{4}\sin\frac{A+B}{4} - \frac{1}{2} \le 0$$

Vế trái là tam thức bậc hai đối với $\sin\dfrac{A+B}{4}$ có

$\Delta' = \cos^2\dfrac{A-B}{4} - 1 \le 0$ nên tam thức đồng dấu với (−2) tức là vế trái ≤ 0, vậy bất đẳng thức (1) đúng (đpcm).

BÀI 23

Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến $AA' = m_a$, $BB' = m_b$, $CC' = m_c$.

a. Tính diện tích S của tam giác theo m_a, m_b, m_c.

b. Chứng minh rằng: $AA' \perp BB'$ khi và chỉ khi:

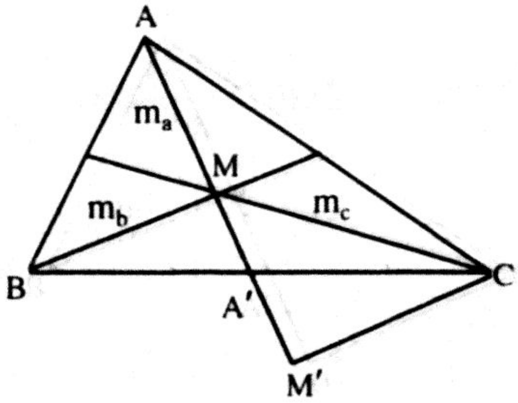
$$\cot gC = 2(\cot gA + \cot gB)$$

Đại học Dược Hà Nội (1996)

GIẢI

a. Kéo dài trung tuyến AA' thêm đoạn A'M' = A'M, ta được tam giác CMM' có các cạnh:

$$MM' = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3}m_a;$$



$$BM = CM' = \frac{2}{3}m_b;$$

$$CM = \frac{2}{3}m_c$$

Như vậy, diện tích S' của tam giác CMM' có diện tích bằng nhau bằng $\frac{1}{3}$ diện tích ΔABC

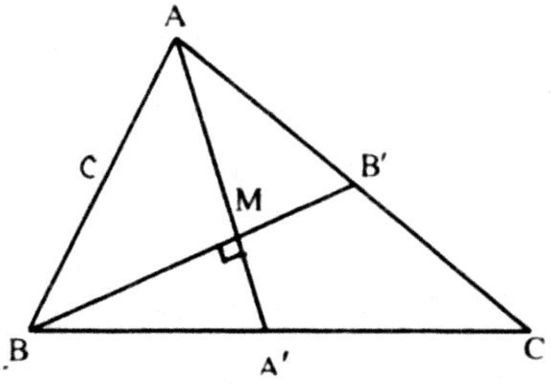
Diện tích S' của tam giác CMM' là:

$$S' = \sqrt{\left[\frac{1}{3}(m_a + m_b + m_c).\frac{1}{3}(m_b + m_c - m_a)\frac{1}{3}(m_a + m_b - m_c).\frac{1}{3}(m_a + m_c - m_b)\right]}$$

Gọi S là diện tích tam giác ABC, ta có:

$$S = 3S' = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_b - m_c)(m_a + m_c - m_b)}$$

b. Do $AA' \perp BB'$ nên AMB là tam giác vuông có các cạnh



$$AB = c; \ BM^2 = \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2,$$

$$AM^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2$$

Theo định lý Pytago, trong tam giác vuông AMB ta có:

$$AM^2 + BM^2 = AB^2$$

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9}m_b^2 = c^2$$

$$4(m_a^2 + m_b^2) = 9c^2$$

$$4\left[\frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2} + \frac{a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}}{2}\right] = 9c^2$$

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 9c^2$$

$$a^2 + b^2 = 5c^2$$

suy ra $a^2 + b^2 - c^2 = 4c^2$ (1)

Theo định lý hàm số cosin ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

nên: $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$.

Theo định lý hàm số sin ta có: $a = 2R\sin A$

$b = 2R\sin B$

$c = 2R\sin C$

Do đó, từ (1) ta suy ra:

$$2ab\cos C = 4c^2$$

$$8R^2\sin A.\sin B.\cos C = 16R^2\sin^2 C$$

$$\sin A.\sin B.\cos C = 2\sin^2 C$$

$$\text{hay} \qquad \frac{\cos C}{\sin C} = 2\frac{\sin C}{\sin A.\sin B}$$

$$\Rightarrow \qquad \text{cotg}C = 2\frac{\sin(A+B)}{\sin A.\sin B}$$

$$= 2\frac{\sin A\cos B + \sin B\cos sA}{\sin A.\sin B}$$

$$\Rightarrow \qquad \text{cotg}C = 2(\text{cotg}A + \text{cotg}C) \qquad (\text{đpcm})$$

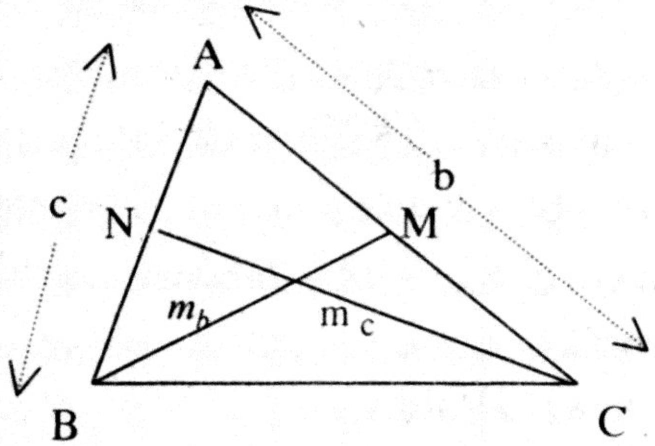
Bải 24

Cho tam giác ABC có AB = c, AC = b và các trung tuyến $BM = m_b$, $CN = m_c$ thỏa mãn $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh rằng:

$$2\text{cotg}A = \text{cotg}B + \text{cotg}C$$

Đại học Kiến trúc Hà Nội (1996)

GIẢI



Ta có : $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$

nên $\frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2}$ (1)

Độ dài các trung tuyến $BM = m_b$ và $CN = m_c$ trong tam giác ABC tính theo công thức:

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}}{2} \quad \text{và} \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}}{2}$$

Lập tỷ số $\dfrac{m_b^2}{m_c^2} = \dfrac{2(a^2 + c^2) - b^2}{2(a^2 + b^2) - c^2}$, nhưng $\dfrac{m_b^2}{m_c^2} = \dfrac{c^2}{b^2}$

Nên ta có: $\dfrac{c^2}{b^2} = \dfrac{2(a^2 + c^2) - b^2}{2(a^2 + b^2) - c^2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2c^2(a^2 + b^2) - c^4 = 2b^2(a^2 + c^2) - b^4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2b^2a^2 + 2b^2c^2 - b^4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2(c^2 - b^2) - (c^4 - b^4) = 0$$

$$(c^2 - b^2)[2a^2 - (c^2 + b^2)] = 0$$

Vì $c^2 - b^2 \neq 0$ nên:

$$2a^2 = b^2 + c^2 \text{ hay } a^2 = b^2 + c^2 - a^2 \qquad (2)$$

Theo định lý hàm số cos ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (3)

Từ (2) và (3) ta có hệ thức: $a^2 = 2bc\cos A$

$$\sin^2 A = 2\sin B\sin C\cos A$$

$$\frac{\sin A}{\sin B\sin C} = \frac{2\cos A}{\sin A} = 2\,\mathrm{cotg}A$$

Vế trái:

$$\frac{\sin A}{\sin B\sin C} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C} = \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\sin B\sin C} = \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C$$

Do đó: $2\mathrm{cotg}A = \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C$

BÀI 25

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C \leq \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C)$$

Đại học An ninh (1997, C)

GIẢI

Ta có: $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

Suy ra $\cos^3 A = \frac{1}{4}(3\cos A + \cos 3A)$

Tương tự: $\cos^3 B = \frac{1}{4}(3\cos B + \cos 3B)$

$$\cos^3 C = \frac{1}{4}(3\cos C + \cos 3C)$$

$$\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C = \frac{3}{4}(\cos A+\cos B+\cos C)+\frac{1}{4}(\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C)$$

Theo bài ra, ta cần chứng minh:

$$\frac{3}{4}(\cos A + \cos B + \cos C) + \frac{1}{4}(\cos 3A+ \cos 3B + \cos 3C) \leq$$

$$\leq \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C)$$

hay $\frac{3}{4}(\cos A + \cos B + \cos C) \leq \frac{9}{8}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2} + \sin^2\frac{A-B}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

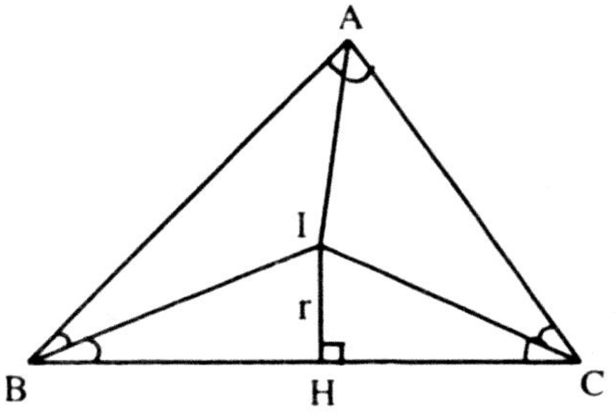
Dấu "=" xảy ra khi ABC là tam giác đều.

BÀI 26

I, r tương ứng là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. R, R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, BIC, CIA, AIB. Chứng minh $R_1.R_2.R_3 = 2rR^2$.

Đại học Dược Hà Nội (1997)

GIẢI



Ta có: $\widehat{BIC} = \pi - \left(\dfrac{B+C}{2}\right)$

$$\sin\widehat{BIC} = \sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$$

Theo định lý hàm số sin, trong tam giác BIC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BIC}} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}} = 2R_1$$

Suy ra $R_1 = \dfrac{a}{2\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}} = 2R\sin\dfrac{A}{2}$

Tương tự, từ các tam giác CIA và AIB, ta có:

$$R_2 = \frac{b}{2\cos\frac{B}{2}} = \frac{4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\cos\frac{B}{2}} = 2R\sin\frac{B}{2}$$

$$R_3 = \frac{c}{2\cos\frac{C}{2}} = \frac{4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{C}{2}} = 2R\sin\frac{C}{2}$$

Do đó: $R_1.R_2.R_3 = 8R^3\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ (1)

Trong tam giác BIC ta có:

$$a = BC = 2R\sin A = BH + CH = r\text{cotg}\frac{B}{2} + r\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$= r\left(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right) = r\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = r\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Thế r vào (1) ta được: $R_1.R_2.R_3 = 2rR^2$

BÀI 27

Trong tam giác ABC, chứng minh luôn luôn có:

$$\mathbf{\cos A + \cos B + \cos C > 1}$$

GIẢI

Áp dụng công thức cộng cung:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

Ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{-B}{2}\right)\right]$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1$$

Vậy trong mọi tam giác ta có $\cos A + \cos B + \cos C > 1$.

BÀI 28

Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c

Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

GIẢI

Vì a, b, c là 3 cạnh tam giác nên ta có:

$|a - b| < c$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 < c^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < c^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 < 2ab \qquad (1)$

Tương tự, ta có:

$b^2 + c^2 - a^2 < 2bc \qquad (2)$

$a^2 + c^2 - b^2 < 2ac \qquad (3)$

Cộng (1), (2) và (3) ta được: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

BÀI 29

Cho tam giác ABC bất kỳ. Chứng minh rằng ta có đẳng thức:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2} = 1$$

Đại học Công đoàn (1997)

GIẢI

Trong tam giác ta có: $\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$

nên $\quad \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\cot g\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

Suy ra: $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$

hay $\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$

Vậy $\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$

BÀI 30

Cho tam giác ABC có cạnh a, b, c và l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác trong tương ứng với các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng:

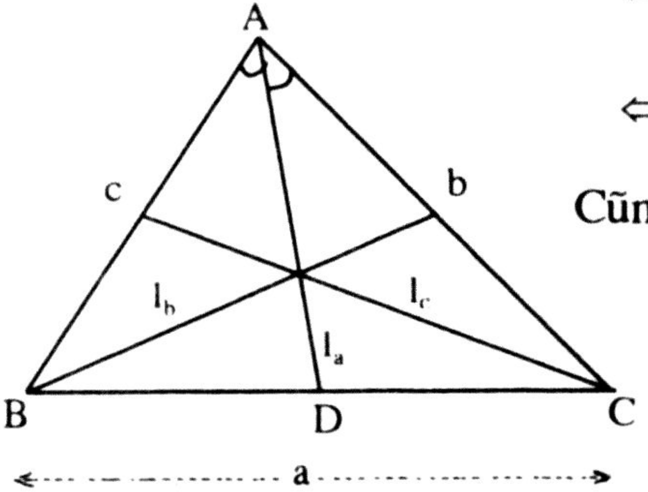
$$\frac{1}{c}(l_a+l_b)+\frac{1}{b}(l_a+l_c)s+\frac{1}{a}(l_b+l_c)\le 3\sqrt{3}$$

Học viện Kỹ thuật Quân sự (1997)

GIẢI

Ta có: $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ADC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2}$$



$$\Leftrightarrow 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = l_a\sin\frac{A}{2}(b+c)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2} = l_a\left(\frac{b+c}{bc}\right) = l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad (1)$$

Cũng chứng minh tương tự, ta suy ra:

$$2\cos\frac{B}{2} = l_b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) \quad (2)$$

$$2\cos\frac{C}{2} = l_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) ta được:

$$2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right) = l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+l_b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+l_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{c}(l_a+l_b)+\frac{1}{b}(l_a+l_c)+\frac{1}{a}(l_b+l_c) \le 3\sqrt{3}$$

Do đó, ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

Đặt $T = \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$T+\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+2\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\le 2\left(\cos\frac{A+B}{4}+\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$= 2.2\cos\left(\frac{\frac{A+B}{4}+\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\frac{A+B}{4}-\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)$$

$$\leq 2.2\cos\left(\frac{\frac{A+B}{4}+\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{24}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6}$$

Suy ra:

$$T + \cos\frac{\pi}{6} \leq 4\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad T \leq 3\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad T \leq \frac{3.\sqrt{3}}{2}$$

Vậy:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Do đó:

$$\frac{1}{c}(l_a + l_b) + \frac{1}{b}(l_a + l_c) + \frac{1}{a}(l_b + l_c) \leq 3\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi ABC là tam giác đều.

BÀI 31

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\mathbf{0 < \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A < 1}$$

Đại học Ngoại thương (1997, D)

GIẢI

Trong tam giác thì sinA, sinB, sinC có giá trị dương, và sinA, sinB, sinC ≤ 1 nên:

$$(1 - \sin A)\ ;\ (1 - \sin B) \text{ và } (1 - \sin C) \geq 0$$

Do đó:

$$\sin A(1 - \sin B) + \sin B(1 - \sin C) + \sin C(1 - \sin A) > 0 \qquad (1)$$

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $A = 90^0$ (hoặc B, C bằng 90^0)

Khai triển vế trái của (1) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

$$\sin A - \sin A\sin B + \sin B - \sin B\sin C + \sin C - \sin C\sin A > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A > 0$$

Ta có: $1 - \sin A \geq 0$

$1 - \sin B \geq 0$

$1 - \sin C \geq 0$

nên $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \geq 0$

Khai triển vế trái ta được:

$$1 - (\sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin A\sin C) - \sin A\sin B\sin C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin A\sin B\sin C \geq \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin A\sin C$$

Suy ra:

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin A\sin C < 1$$

Chú ý:

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) = (1 - b - a + ab)(1 - c)$$
$$= 1 - c - b + bc - a + ac + ab - abc$$
$$= 1 - (a + b + c - ab - bc - ac) - abc$$

BÀI 32

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

$$\left(1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) \geq 2 + \sqrt{3} + \frac{S}{p^2}$$

trong đó S là diện tích, p là nửa chu vi của tam giác.

GIẢI

Ta có:

$$\left(1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Biết $$\mathrm{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}}=\cot g\frac{C}{2}=\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{C}{2}}$$

suy ra $$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}=1 \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}\geq 2\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\geq 2\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\geq 2\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

Cộng vế với vế, suy ra:

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\geq \mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}+2\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+2\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+2\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}\geq 3$$

$$\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\right)^2\geq 3$$

Vậy: $$\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\geq\sqrt{3} \qquad (2)$$

Ta có: $$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

$$=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc+b^2+c^2-a^2}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2 - a^2} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{(b+c-a)(b+c+a)}$$

$$= \frac{(p-c)(p-b)}{(p-a)p}$$

nên $\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

Tương tự:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Do đó:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}}$$

$$= \frac{S}{p^2} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có: vế trái $\geq 2 + \sqrt{3} + \dfrac{S}{p^2}$

BÀI 33

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} \geq 3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

GIẢI

Trong tam giác ta có:

$$\cot g\frac{C}{2}=tg\frac{A+B}{2}=\frac{tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}}{1-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\qquad \cot g\frac{C}{2}=\frac{\frac{1}{\cot g\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cot g\frac{B}{2}}}{1-\frac{1}{\cot g\frac{A}{2}}\cdot\frac{1}{\cot g\frac{B}{2}}}=\frac{\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{A}{2}}{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}-1}$$

Suy ra: $\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}-\cot g\frac{C}{2}=\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}$

hay $\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}=\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$

Ta có:

$$\left(\cot g\frac{A}{2}-\cot g\frac{B}{2}\right)^2+\left(\cot g\frac{B}{2}-\cot g\frac{C}{2}\right)^2+\left(\cot g\frac{C}{2}-\cot g\frac{A}{2}\right)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cot g^2\frac{A}{2}+2\cot g^2\frac{B}{2}+2\cot g^2\frac{C}{2}\geq 2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+2\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot g^2\frac{A}{2}+\cot g^2\frac{B}{2}+\cot g^2\frac{C}{2}\geq \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

Cộng 2 vế thêm:

$$2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+2\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

ta có VT =

$$\cot g^2\frac{A}{2}+\cot g^2\frac{B}{2}+\cot g^2\frac{C}{2}+2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+2\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$=\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)^2$$

$$=\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$VP = 3\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2} + 3\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} + 3\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

Do đó:

$$\left(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right)\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$\geq 3\left(\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} + \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}\right)$$

$$\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} \geq 3\left(\frac{\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2} + \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}}{\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} \geq 3\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right) \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI 34

1. Giải phương trình: $2 + \cos 2x = -5\sin x$.

2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

$$\sin A.\sin B \leq \cos^2\frac{C}{2}$$

Đại học Quốc gia Hà Nội (1997, D)

GIẢI

1. Ta có: $2 + \cos 2x = -5\sin x$

$\Leftrightarrow \quad 3 - 2\sin^2 x = -5\sin x$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$

Phương trình có nghiệm $\sin x = \frac{-1}{2}$ suy ra: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$ $(k \in Z)$

$\sin x = 3$ (vô nghiệm)

2. Ta phải chứng minh:

$$\sin A\sin B \le \cos^2\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \le \frac{1}{2}(1 + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A - B) + \cos C \le 1 + \cos C$$

$\Leftrightarrow \quad \cos(A - B) \le 1$ (luôn đúng trong mọi tam giác).

BÀI 35

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác ABC. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Đại học Quốc gia T.P. Hồ Chí Minh (1997, D)

GIẢI

Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < 2$

Giả sử $a \le b \le c$ thì $\dfrac{a}{b+c} < \dfrac{a}{a+b}$

$$\frac{b}{c+a} < \frac{b}{a+b}$$

$$\frac{c}{a+b} < \frac{c}{c}$$

Suy ra: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b} + \dfrac{c}{c} = 2$

Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$(a + b) + (b + c) + (c + a) \ge 3\sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\qquad(2)$$

Nhân (1) và (2) ta được:

$$2(a+b+c)\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right]\geq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}\geq\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}\geq\frac{3}{2}$$

BÀI 36

Cho A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0$$

Học viện Kỹ thuật Mật mã (1997)

GIẢI

Ta cần chứng minh:

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0\ (1)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C &= 2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1\\ &= -2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C-1\\ &= -2\cos C[\cos(A-B)-\cos C]-1\\ &= -2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]-1\\ &= -2\cos C[2\cos A\cos(-B)]-1\\ &= -4\cos A\cos B\cos C-1 \qquad (2)\end{aligned}$$

Thế (cos2A + cos2B + cos2C) ở (2) vào (1), ta được:

$$-4\cos A\cos B\cos C-1+4\cos A\cos B\cos C+1=0$$

Vậy trong mọi tam giác ta luôn có:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A.\cos B.\cos C + 1 = 0$$

BÀI 37

Trong tất cả các tam giác có chu vi cho trước, hãy định ra tam giác có tổng các lập phương các cạnh của tam giác là bé nhất.

Đại học An ninh – Cảnh sát

GIẢI

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$(a + b + c)^2 \le (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

(a, b, c là ba cạnh của tam giác, chu vi là $2p = a + b + c$)

Bình phương 2 vế của phương trình (có 2 vế đều dương), ta có:

$$(a + b + c)^4 \le 9(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$= 9\left(\sqrt{a}\sqrt{a^3} + \sqrt{b}\sqrt{b^3} + \sqrt{c}\sqrt{c^3}\right)^2$$

$$\le 9\left[\left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}\right)\right]\left[\left(\sqrt{a^3}\right)^2 + \left(\sqrt{b^3}\right)^2 + \left(\sqrt{c^3}\right)^2\right]$$

$$= 9(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3)$$

Do đó suy ra:

$$a^3 + b^3 + c^3 \ge \frac{(a + b + c)^4}{9(a + b + c)}$$

$$= \frac{(a + b + c)^3}{9}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b =c ⇔ ABC là tam giác đều.

BÀI 38

1. Giải phương trình lượng giác:

$$3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$$

2. Cho tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c.

Chứng minh rằng:

$$2b = a + c \text{ khi và chỉ khi } \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2} = 3$$

Đại học Cần Thơ

GIẢI

1. Ta có:

$$3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 - 4(1 - \sin^2 x) = \sin x(2\sin x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 x - 1 = \sin x(2\sin x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)[\sin x - (2\sin x - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)(1 - \sin x) = 0$$

* Với $2\sin x + 1 = 0$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ ta có nghiệm: } \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

* Với $1 - \sin x = 0$

$$\sin x = 1 \quad \text{ta có nghiệm: } \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

2. Ta có: $2b = a + c$

$$\Leftrightarrow \quad 4R\sin B = 2R(\sin A + \sin C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin B = \sin A + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\sin\frac{A + C}{2}\cos\frac{A - C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

hay $$\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2} = 3$$

BÀI 39

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC, S là diện tích tam giác. Chứng minh:

$$\mathbf{cotgA + cotgB + cotgC = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}}$$

Đại học Dược Hà Nội (1998)

GIẢI

Theo định lý hàm số cosin ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\sin A\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\text{cotg}A \qquad (1) \quad (\text{vì } S = \frac{1}{2}bc\sin A)$$

Tương tự:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 4S\text{cotg}B \qquad (2)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 4S\text{cotg}C \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế, ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4S(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C)$$
$$0 = a^2 + b^2 + c^2 - 4S(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C)$$

Suy ra:

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

BÀI 40

Cho tam giác ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = 3\cos A + 2(\cos B + \cos C)$$

Đại học Luật Hà Nội

GIẢI

Ta có: $M = 3\cos A + 2(\cos B + \cos C)$

$$= 3\cos A + 2\left(2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right) \qquad (1)$$

Biết $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$ và $\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}$ (vì $\frac{B+C}{2}$ và $\frac{A}{2}$ là hai góc phụ nhau) nên từ (1) ta suy ra:

$$M = 3\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

hay $$6\sin^2\frac{A}{2} - 4\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} + M - 3 = 0 \qquad (2)$$

Đặt $x = \sin\frac{A}{2}$, từ (2) ta có phương trình bậc hai:

$$6x^2 - 4x\cos\frac{B-C}{2} + M - 3 = 0$$

Phương trình này có nghiệm ($\sin\frac{A}{2} = x$ là sin của một góc trong tam giác)

Do đó, $\Delta' = 4\cos^2\frac{B-C}{2} - 6(M-3) \geq 0$

Suy ra: $6(M-3) \le 4\cos^2\frac{B-C}{2} \le 4$

$$\Rightarrow \quad M - 3 \le \frac{2}{3}$$

$$M \le 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

Vậy M đạt giá trị lớn nhất là $\frac{11}{3}$ khi:

$$\begin{cases} \cos^2\frac{B-C}{2} = 1 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ x = \sin\frac{A}{2} = \dfrac{2\cos\frac{B-C}{2}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ A = 2\arcsin\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy: $\boxed{\max M = \frac{11}{3}}$

BÀI 41

Cho a, b, c lần lượt là các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

Đại học Ngoại ngữ Hà Nội

GIẢI

Ta có: $\sin C = \sin(A + B)$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$$

và $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

Vế trái của hệ thức:

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

có thể biến đổi thành:

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{\sin C.\sin(A-B)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{(1-\cos 2A) - (1-\cos 2B)}{2\sin^2 C}$$

$$= \frac{2\sin^2 A - 2\sin^2 B}{2\sin^2 C}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{2R}\right)^2 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2}{\left(\frac{c}{2R}\right)^2}$$

Vậy $\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$ (đpcm).

Chú ý: Cũng có thể biến đổi vế phải $\frac{a^2 - b^2}{c^2}$ để đi đến kết quả bằng vế trái $\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

BÀI 42

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

Đại học Ngoại thương Hà Nội (1998, A)

GIẢI

Hệ thức cần chứng minh:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)\ (1)$$

Biến đổi vế trái, ta có:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra cần phải chứng minh:

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

Trong tam giác ABC thì $\frac{A+B}{2}$ và $\frac{C}{2}$ là hai góc phụ nhau.

Ta có:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

suy ra: $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$

hay: $$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}=1 \qquad (3)$$

Nhân 2 vế của (3) với $\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$ ta có:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}\left(\mathrm{cotg}\frac{A}{2}\mathrm{cotg}\frac{B}{2}\mathrm{cotg}\frac{C}{2}\right)+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}\left(\mathrm{cotg}\frac{A}{2}\mathrm{cotg}\frac{B}{2}\mathrm{cotg}\frac{C}{2}\right)+$$

$$+\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}\left(\mathrm{cotg}\frac{A}{2}\mathrm{cotg}\frac{B}{2}\mathrm{cotg}\frac{C}{2}\right)=\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}=\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} \qquad (4)$$

Thế (4) vào (2) ta được đẳng thức cần chứng minh.

BÀI 43

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

$$\cos^3\frac{A}{3}+\cos^3\frac{B}{3}+\cos^3\frac{C}{3}\le\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\right)$$

GIẢI

Biết: $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ suy ra:

$$\cos^3 A = \frac{1}{4}(3\cos A + \cos 3A)$$

Do đó: $$\cos^3\frac{A}{3}=\frac{1}{4}\left(3\cos\frac{A}{3}+\cos A\right) \qquad (1)$$

$$\cos^3\frac{B}{3}=\frac{1}{4}\left(3\cos\frac{B}{3}+\cos B\right) \qquad (2)$$

$$\cos^3\frac{C}{3}=\frac{1}{4}\left(3\cos\frac{C}{3}+\cos C\right) \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế ta có:

$$\cos^3\frac{A}{3}+\cos^3\frac{B}{3}+\cos^3\frac{C}{3}=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\cos A+\cos B+\cos C\right) \qquad (4)$$

Thế (4) vào hệ thức cần chứng minh, ta suy ra:

$$\frac{1}{4}\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)\le\frac{3}{8} \qquad (5)$$

hay $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

Ta có:

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}+1$$

$$=-2\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}+1$$

$$=-2\left[\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right]^2+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}+1$$

$$\le\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}+1\le\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

Vậy $\frac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C)\le\frac{1}{4}.\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$ suy ra:

$$\cos^3\frac{A}{3}+\cos^3\frac{B}{3}+\cos^3\frac{C}{3}\le\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\right)$$

BÀI 44

Cho A, B, C là các góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=2$$

Đại học Quốc gia Hà Nội

GIẢI

Ta có: $$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\sin A+\frac{1}{2}\sin B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$=1+\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} \qquad (1)$$

Tương tự:

$$\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=1-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) ta có:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}=1+\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+1-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}=2$$

BÀI 45

Cho tam giác ABC bất kỳ với ba góc ở đỉnh là A, B, C.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{3}\cos B + 3(\cos A + \cos C)$$

Đại học Sư phạm Hà Nội 2 (1998, A)

GIẢI

Ta có: $P = \sqrt{3}\cos B + 3(\cos A + \cos C)$

$$= \sqrt{3}\cos B + 3.2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$= \sqrt{3}\cos B + 6\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad P \le \sqrt{3}\cos B + 6\sin\frac{B}{2}$$

$$= \sqrt{3}\left(1 - 2\sin^2\frac{B}{2}\right) + 6\sin\frac{B}{2}$$

$$= -2\sqrt{3}\sin^2\frac{B}{2} + 6\sin\frac{B}{2} + \sqrt{3}$$

$$= -2\sqrt{3}\left(\sin\frac{B}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}\left(\sin\frac{B}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \le \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Giá trị lớn nhất của P là: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ khi dấu "=" xảy ra.

Khi đó:

$$\begin{cases} \cos\frac{A-C}{2} = 1 \\ \sin\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ \frac{B}{2} = 60^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 120^0 \\ A = C = \frac{60^0}{2} = 30^0 \end{cases}$$

BÀI 46

Cho tam giác ABC bất kỳ với ba góc ở đỉnh là A, B, C đều nhọn. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) + \frac{1}{3}(\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C) > \pi$$

Đại học Sư phạm Hà Nội 2

GIẢI

Thay $\pi = A + B + C$ vào vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) + \frac{1}{3}(\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C) > A + B + C$$

hay:

$$\left(\frac{2}{3}\sin A + \frac{1}{3}\text{tg}A - A\right) + \left(\frac{2}{3}\sin B + \frac{1}{3}\text{tg}B - B\right) + \left(\frac{2}{3}\sin C + \frac{1}{3}\text{tg}C - C\right) > 0$$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\text{tg}x - x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ta có: $f'(x) = \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1$$

$$\geq \frac{1}{3}.3\sqrt[3]{\cos x \cos x \frac{1}{\cos^2 x}} - 1 = 0$$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vậy f(x) đồng biến trọng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f'(x) > f(0) = 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Do đó: $\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\text{tg}x - x > 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\text{tg}x > x \qquad (1)$$

Với A, B, C là 3 góc nhọn thì $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$

Từ (1) ta suy ra:

$$\frac{2}{3}\sin A + \frac{1}{3}\text{tg}A + \frac{2}{3}\sin B + \frac{1}{3}\text{tg}B + \frac{2}{3}\sin C + \frac{1}{3}\text{tg}C > A + B + C = \pi$$

BÀI 47

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác

Đại học Thuỷ lợi. (1998)

GIẢI

Ta có: $M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$

Cộng 1 vào hai vế ta có:

$$M + 1 = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad M + 1 = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \quad M + 1 = \frac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{3}{M+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + 1 + \cos^2 C = \frac{3}{M+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A+B)\cos(A-B)+1+\cos^2C-\frac{3}{M+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos C\cos(A-B)+1+\cos^2C-\frac{3}{M+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2C-\cos C\cos(A-B)+\left(1-\frac{3}{M+1}\right)=0$$

cosC là một nghiệm của phương trình bậc hai này, phương trình có nghiệm khi:

$$\Delta=\cos^2(A-B)-4\left(1-\frac{3}{M+1}\right)\geq 0$$

hay $\qquad 4\left(1-\dfrac{3}{M+1}\right)\leq\cos^2(A-B)\leq 1$

$$1-\frac{3}{M+1}\leq\frac{1}{4}\quad\Leftrightarrow\quad M\leq 3$$

Giá trị lớn nhất của M = 3 khi: $\begin{cases}\cos^2(A-B)=1\\ \Delta=0\end{cases}$

Từ đó ta suy ra: $\begin{cases}\sin(A-B)=0 & \Leftrightarrow\ A=B\\ \cos C=\dfrac{1}{2}\cos(A-B) & \Leftrightarrow\ C=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của M = 3 khi tam giác ABC đều.

BÀI 48

a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\mathbf{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2>a^3+b^3+c^3}$$

Đại học Dân lập Văn Lang TP. Hồ Chí Minh (1998)

GIẢI

Ta có: $\quad a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2>a^3+b^3+c^3$

$$\Leftrightarrow \quad a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2-(a^3+b^3+c^3)>0$$

$\Leftrightarrow \quad a[(b-c)^2 - a^2] + b[(c-a)^2 - b^2] + c[(a+b)^2 - c^2] > 0$

$\Leftrightarrow \quad a[(b-c+a)(b-c-a)] + b[(c-a+b)(c-a-b)]$

$\quad + c[(a+b+c)(a+b-c)] > 0$

$\Leftrightarrow \quad (b-c+a)[a(b-c-a) - b(c-a+b) + c(a+b+c)] > 0$

$\Leftrightarrow \quad (b-c+a)[ab-ac-a^2-bc+ab-b^2+ac+bc+c^2)] > 0$

$\Leftrightarrow \quad (b-c+a)[c^2-(a-b)^2] > 0$

$\Leftrightarrow \quad (a+b-c)[(c+a-b)(c-a+b)] > 0$

$\Leftrightarrow \quad (a+b-c)(c+a-b)(b+c-a) > 0 \qquad (1)$

Trong tam giác, tổng 2 cạnh lớn hơn cạnh thứ ba, nên bất đẳng thức (1) luôn đúng.

BÀI 49

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \leq 3\sqrt{3}R.$$

Đại học Dân lập Văn Lang (1998, B, D)

GIẢI

Ta cần chứng minh: $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R \qquad (1)$

Từ định lý hàm số sin suy ra $\frac{a}{2R} = \sin A$, $\frac{b}{2R} = \sin B$, $\frac{c}{2R} = \sin C$

Chia 2 vế của (1) cho 2R, ta được:

$$\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$

Đặt $T = \sin A + \sin B + \sin C$

$$\Rightarrow T + \sin\frac{A+B+C}{3} = \sin A + \sin B + \sin C + \sin\frac{A+B+C}{3}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C+\frac{A+B+C}{3}}{2}\cos\frac{C-\frac{A+B+C}{3}}{2}$$

$$\le 2\sin\frac{A+B}{2} + 2\sin\frac{A+B+4C}{6}$$

$$= 4\sin\frac{4A+4B+4C}{12}\cos\frac{2A+2B-4C}{12}$$

$$\le 4\sin\frac{A+B+C}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad T \le 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

Từ (3) và (2) ta suy ra (1) đúng tức là $a + b + c \le 3\sqrt{3}R$

BÀI 50

Cho a, b, c là độ dài các cạnh và r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \le \frac{1}{4r^2}$$

Học viện Kỹ thuật Quân sự (1998)

GIẢI

Ta có: $a^2 \ge a^2 - (b-c)^2$ nên $\frac{1}{a^2} \le \frac{1}{a^2 - (b-c)^2}$ (1)

Tương tự: $b^2 \ge b^2 - (c-a)^2$ nên $\frac{1}{b^2} \le \frac{1}{b^2 - (c-a)^2}$ (2)

$c^2 \ge c^2 - (a-b)^2$ nên $\frac{1}{c^2} \le \frac{1}{c^2 - (a-b)^2}$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế, ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{a^2-(b-c)^2}+\frac{1}{b^2-(c-a)^2}+\frac{1}{c^2-(a-b)^2}$$

$$=\frac{1}{(a+b-c)(a-b+c)}+\frac{1}{(b+c-a)(b-c+a)}+\frac{1}{(c+a-b)(c-a+b)}$$

$$=\frac{1}{2(p-c).2(p-b)}+\frac{1}{2(p-a).2(p-c)}+\frac{1}{2(p-b).2(p-a)}$$

$$=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{4(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p^2}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{p^2}{4S}=\frac{p^2}{4(pr)^2}=\frac{1}{4r^2}$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $b-c=c-a=a-b=0$

Do đó $a=b=c$

Vậy ABC là tam giác đều.

BÀI 51

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có:

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\ge\frac{3}{4}$$

Phân viện Báo chí và Tuyên truyền (1998, ban KH Xã hội)

GIẢI

Bất đẳng thức đã cho : $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\ge\frac{3}{4}$ (1)

Biết $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ và $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

Ta có:

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2C$$

$$=1+\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}+\cos^2C$$

$$= 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra :

$$\cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$4\cos^2 C - 4\cos(A - B)\cos C \geq 0$$

$$[2\cos C - \cos(A - B)]^2 + \sin^2(A - B) \geq 0$$

Dấu " = " xảy ra khi : $\begin{cases} \sin(A - B) = 0 & \Leftrightarrow \quad A = B \\ 2\cos C = \cos(A - B) = 1 & \Leftrightarrow \quad C = 60^0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ tam giác ABC là tan giác đều

Bài 52

Giả sử A, B, C là ba góc trong một tam giác. Tìm giá trị bé nhất của biểu thức:

$$\mathbf{M = \frac{1}{2 + \cos 2A} + \frac{1}{2 + \cos 2B} + \frac{1}{2 - \cos 2C}}$$

GIẢI

Biểu thức đã cho :

$$M = \frac{1}{2 + \cos 2A} + \frac{1}{2 + \cos 2B} + \frac{1}{2 - \cos 2C}$$

Biết $2 + \cos 2A > 0$; $2 + \cos 2B > 0$; $2 + \cos 2C > 0$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$M \geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{(2 + \cos 2A)(2 + \cos 2B)(2 - \cos 2C)}}$$

$$\geq \frac{9}{6 + \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C}$$

Biến đổi biểu thức ở mẫu ,ta có :

$$6 + \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C =$$

$$= 6 + 2\cos(A + B)\cos(A - B) - (2\cos^2 C - 1)$$
$$= 7 - 2\cos C\cos(A - B) - 2\cos^2 C$$
$$= 7 - 2[\cos^2 C + \cos C\cos(A - B)]$$
$$= 7 - 2\left[\left(\cos C + \frac{1}{2}\cos(A - B)\right)^2 - \frac{1}{4}\cos^2(A - B)\right]$$
$$= 7 + \frac{1}{2}\cos^2(A - B) - 2\left[\cos C + \frac{1}{2}\cos(A - B)\right]^2$$

Do đó: $M \geq \dfrac{9}{7 + \dfrac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{M \geq \dfrac{6}{5}}$

Dấu "=" xảy ra khi $A = B = 30^0$ và $C = 120^0$, giá trị nhỏ nhất của M là $\dfrac{6}{5}$.

BÀI 53

Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} = 1$$

và $\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}\mathrm{tg}\dfrac{B}{2}\mathrm{tg}\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

Đại học Nông nghiệp I (1999, A)

GIẢI

Trong tam giác ta có: $\dfrac{A + B + C}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{A + B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

Biết $\mathrm{tg}\dfrac{A + B}{2} = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}\right) = \mathrm{cotg}\dfrac{C}{2}$

Áp dụng công thức: $\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

suy ra : $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$$

Với ba số dương $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ và $\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$1=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\geq 3\sqrt[3]{\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2}$$

Lập phương hai vế:

$$1^3\geq 3^3\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2$$

$$1^3\geq 27\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Dấu " = " xảy ra khi $\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} = \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\frac{A}{2} = \mathrm{tg}\frac{B}{2} = \mathrm{tg}\frac{C}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = B = C$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC là tam giác đều.

BÀI 54

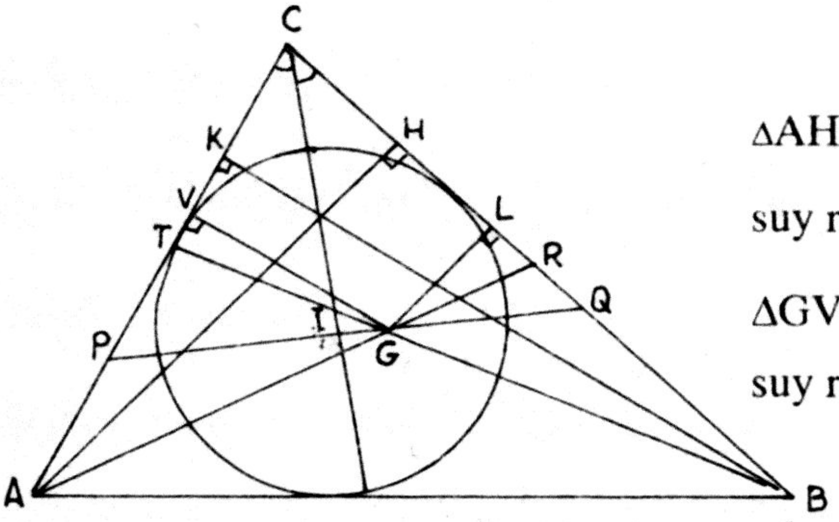
Cho tam giác ABC có đường thẳng qua trọng tâm G và tâm đường tròn nối tiếp I vuông góc với đường phân giác trong của góc C, gọi a, b, c là cạnh tương ứng của tam giác ABC.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{2ab}{a+b}$

Đại học Cảnh sát Nhân dân (2000, A)

GIẢI

Gọi I là tâm đường tròn nối tiếp và r là bán kính; G là trọng tâm, d_a, d_b là khoảng cách từ G đến cạnh a, b.



$\Delta AHR \sim \Delta GLR$

suy ra $GL = d_a = \dfrac{1}{3}h_a$

$\Delta GVT \sim \Delta BKT$

suy ra $GV = d_b = \dfrac{1}{3}h_b$

Ta có: $dt\Delta CPQ = dt\Delta CPI + dt\Delta CIQ = \dfrac{1}{2}r.CP + \dfrac{1}{2}r.CQ$

$$= \frac{1}{2}r(CP + CQ) = rCP \qquad (1)$$

vì $CP = CQ$ do ΔCPQ cân

$dt\,\Delta CPQ = dt\Delta CPG + dt\Delta CGQ$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{3}h_bCP + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}h_aCQ$$

$$= \frac{1}{6}(h_b + h_a)CP \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$rCP = \frac{1}{6}(h_b + h_a)CP$$

$$r = \frac{1}{6}(h_b + h_a) \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{1}{6}\left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{p}{3} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2p}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}} \text{(đpcm.)}$$

BÀI 55

Chứng minh rằng nếu A, B, C là ba góc trong một tam giác thì:

$$\mathbf{cosA + cosB + cosC = 4cos}\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}+1$$

Cao đẳng Công nghiệp Hà Nội (2000)

GIẢI

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}+1$$

Cộng thêm cos (A + B + C) vào vế trái của đẳng thức này, ta được:

cosA + cosB + cosC + cos (A + B + C) =

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B-B}{2} + 2\cos\frac{C+(A+B+C)}{2}\cos\frac{C-A-B-C}{2}.$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B+2C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}.2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

Biết $\cos(A + B + C) = \cos\pi = -1$

Do đó : $\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$

$\Rightarrow \quad \cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} + 1$ (đpcm)

BÀI 56

Các góc tam giác ABC thoả mãn điều kiện :

$\cos C(\sin A + \sin B) = \sin C\cos(A - B)$

Hãy tính : $\cos A + \cos B$

Đại học Nông nghiệp I (2000, A)

GIẢI

Ta có:

$$\cos C(\sin A + \sin B) = \sin C\cos(A - B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C.2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos(A - B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C.\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\cos(A - B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} = \sin\frac{C}{2}\left(2\cos^2\frac{A-B}{2} - 2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\left(\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right) (1)$$

Vì $\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2} \neq 0$ nên (1) trở thành:

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 1$$

Do đó : $\cos A + \cos B = 1$

BÀI 57

Tính góc C của tam giác ABC biết :

$$(1 + \cot gA)(1 + \cot gB) = 2$$

Đại học Nông nghiệp (2000, A)
Đại học Sư phạm Vinh (2000,A)

GIẢI

Ta có:

$$(1 + \cot gA)(1 + \cot gB) = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \cot gB + \cot gA + \cot gA \cot gB = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(A+B)}{\sin A.\sin B} + \frac{\cos A \cos sB}{\sin A.\sin B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C + \cos A \cos B = \sin A.\sin B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C + \cos A \cos sB - \sin A.\sin B = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C + \cos(A+B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C = -\cos(A+B) = \cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad tgC = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad C = 45^0$$

Góc C của tam giác ABC là 45^0

BÀI 58

Cho tam giác ABC. Giả sử G là giao điểm các đường trung tuyến của tam giác. Ký hiệu $\widehat{GAB} = \alpha$; $\widehat{GBC} = \beta$; $\widehat{GCA} = \gamma$.

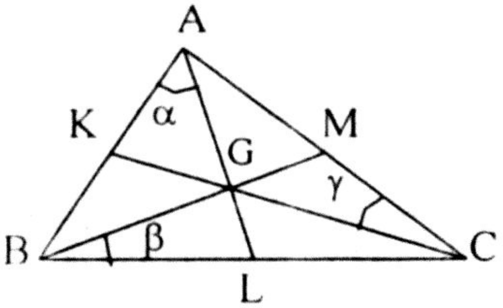
Chứng minh rằng: $\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma = \dfrac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$

trong đó a, b, c là độ dài 3 cạnh và S là diện tích tam giác

Đại học Ngoại thương(2000, D)

GIẢI

$BC = a$; $AC = b$; $AB = c$
$AL = m_a$; $BM = m_b$; $CK = m_c$



$$dt\Delta ABG = \frac{1}{3} dt\Delta ABC = \frac{1}{3} S$$

Trong tam giác ABG ta có :

$$BG^2 = c^2 + AG^2 - 2c.AG\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{c^2 + AG^2 - BG^2}{2c.AG}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c^2 + AG^2 - BG^2}{2cAG.\sin\alpha}$$

$$\cot g\alpha = \frac{c^2 + AG^2 - BG^2}{4S_{\Delta ABG}}$$

$$= \frac{c^2 + AG^2 - BG^2}{\frac{4}{3}S} = \frac{3}{4}S(c^2 + AG^2 - BG^2) \quad (1)$$

Tương tự : $\cot g\beta = \frac{3}{4}S(a^2 + BG^2 - CG^2)$ (2)

$\cot g\gamma = \frac{3}{4}S(b^2 + CG^2 - AG^2)$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) từng vế (1) ta có :

$$\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S} \quad (\text{đpcm})$$

BÀI 59

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có :

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

Đại học Quốc gia Hà Nội (2000, D)

GIẢI

Ta có :

$$\sin A + \sin B - \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}\cos\left(-\frac{B}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

Do đó :

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \frac{4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{cotg}\frac{C}{2}$$

BÀI 60

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos A.\cos B.\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Đại học sư phạm Vinh (2000, A)

GIẢI

Ta cần chứng minh : $\cos A.\cos B.\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (1)

- Nếu ABC là tam giác có một góc tù , giả sử $A > 90^0$ thì $\cos A < 0$, $\cos B > 0$, $\cos C > 0$.

Vế trái của (1) < 0 còn vế phải của (1) > 0 nên (1) luôn đúng.

- Nếu ABC là tam giác vuông , giả sử $A = 90^0$ thì $\cos A = 0$ suy ra (1) luôn đúng .

- Nếu ABC có ba góc đều nhọn thì cosA, cosB, cosC đều có giá trị dương.

Ta có :

$$\sqrt{\cos B\cos C} \le \frac{1}{2}(\cos B + \cos C) = \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{\cos B\cos C} \le \sin\frac{A}{2} \qquad (2)$$

Tương tự

$$\sqrt{\cos A\cos C} \le \sin\frac{B}{2} \qquad (3)$$

$$\sqrt{\cos A\cos B} \le \sin\frac{C}{2} \qquad (4)$$

Nhân từng vế (2), (3) và (4) ta được:

$$\sqrt{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C} \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos A.\cos B.\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad \text{(đpcm)}$$

BÀI 61

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \ge 6$$

Đại học Sư phạm Vinh (2000, D)

GIẢI

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \ge 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{2\cos\frac{C-A}{2}\sin\frac{C+A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}\ge 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A+\sin B}{\sin C}+\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C+\sin A}{\sin B}\ge 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\right)+\left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\right)+\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)\ge 6 \qquad (1)$$

Biết : $\frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A}\ge 2$

$\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\ge 2$

và $\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\ge 2$

nên (1) luôn đúng.

BÀI 62

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$

Đại học Y Hải Phòng (2000)

GIẢI

Biết (b + c – a), (c + a – b) và (a + b – c) là các số dương

Áp dụng bất đẳng thức Côsi với hai số dương ta có :

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\le\frac{b+c-a+c+a-b}{2}=c \qquad (1)$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\le\frac{c+a-b+a+b-c}{2}=a \qquad (2)$$

$$\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}\le\frac{b+c-a+a+b-c}{2}=b \qquad (3)$$

Nhân (1), (2) và (3) từng vế một ta có:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \geq 1$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Côsi với ba số dương.

$\frac{a}{b+c-a}, \frac{b}{c+a-b}, \frac{c}{a+b-c}$ ta có :

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}} \geq 3$$

BÀI 63

Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh và S là diện tích một tam giác tuỳ ý.

a. Chứng minh rằng : $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4$

b. Từ đó hãy chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$

Đại học Dân lập Hùng Vương (2000, B)

GIẢI

a. Chứng minh : $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4$

Áp dụng công thức Hêrông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow \qquad S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

$$16S^2 = [(b+c+a)(b+c-a)][a+(c-b)][a-(c-b)]$$

$$= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (c-b)^2]$$

$$= (b+c)^2a^2 - (c+b)^2(c-b)^2 - a^4 + a^2(c-b)^2$$

$$= a^2b^2 + 2bca^2 + a^2c^2 - (c^2-b^2)^2 - a^4 + a^2c^2 - 2a^2bc + a^2b^2$$

$$= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - (c^4 - 2b^2c^2 + b^4) - a^4$$

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4$$

b. Biết $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$.

$$\Rightarrow \qquad 2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4$$

Vậy $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$

BÀI 64

Tính các góc của tam giác ABC, biết chúng thoả mãn :

$$\sin(B - A)\sin C + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$$

Viện Đại học Mở Hà Nội (2000, A)

GIẢI

Ta có : $\sin(B - A)\sin C + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(B - A)\sin(A + B) + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 2A - \cos 2B) + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 A - 2\cos^2 B + 1) + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \sin^2 A - \cos^2 B + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sin^2 A - \sin A + \frac{1}{4}\right) + \left(\cos^2 B - \cos B + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sin A - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos B - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 30^0 \\ \cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^0 \Rightarrow C = 90^0 \end{cases}$$

Vậy ABC là tam giác vuông có $B = 60^0$, $A = 30^0$, $C = 90^0$

BÀI 65

Tính các góc của tam giác ABC, biết chúng thoả mãn:

$$\sin^2 A - \sin A + \cos^2 B - \cos B = \frac{1}{2}$$

Viện Đại học Mở Hà Nội (2000, D)

GIẢI

Ta có : $\sin^2 A - \sin A + \cos^2 B - \cos B = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A - \sin A + \frac{1}{4} + \cos^2 B - \cos B + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sin A - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos B - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \qquad (1)$$

Từ (1) ta suy ra :

$$\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 30^0$$

$$\cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^0 \Rightarrow C = 90^0$$

BÀI 66

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta luôn có :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

trong đó h_a, h_b, h_c là ba đường cao còn r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác .

Viện Đại học Mở Hà Nội (2000, D)

GIẢI

Gọi p là nửa chu vi tam giác có ba cạnh a, b, c :

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Suy ra : $\frac{p}{S} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{S}{p}} = \frac{1}{\frac{2S}{a}} + \frac{1}{\frac{2S}{b}} + \frac{1}{\frac{2S}{c}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{ah_a}{a}} + \frac{1}{\frac{bh_b}{b}} + \frac{1}{\frac{ch_c}{c}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad \text{(đpcm)}$$

BÀI 67

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}} = 1$$

Đại học Dân lập Hải Phòng (2000)

GIẢI

Ta có : $$\cot g\frac{A}{2} = tg\frac{B+C}{2} = \frac{tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}}{1 - tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}} = 1$$

$$= \frac{\frac{1}{\cot g\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot g\frac{C}{2}}}{1 - \frac{1}{\cot g\frac{B}{2}}\frac{1}{\cot g\frac{C}{2}}}$$

$$= \frac{\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}}{\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} - \cot g\frac{A}{2} = \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} = \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}}{\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}} = 1 \quad (\text{đpcm})$$

BÀI 68

Giả sử a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC và thoả mãn điều kiện : $$a\cos A + b\cos sB + c\cos C = \frac{a+b+c}{2}$$

Tam giác đó có đặc điểm gì ?

Đại học Ngoại thương (1992)

GIẢI

Biết $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$ nên từ hệ thức:

$$a\cos A + b\cos sB + c\cos C = \frac{a+b+c}{2}$$

ta suy ra :

$$R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\cos\frac{C}{2}[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}]$$

$$4\sin A.\sin B.\sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$$

Theo định lý hàm số Cos ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

nên $1 - \cos A = 1 - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} \le \sqrt{\frac{a^2}{4bc}} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

Dấu " = " xảy ra khi b = c (2)

Tương tự $\quad \sin\dfrac{B}{2} \le \dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$

$$\sin\frac{C}{2} \le \frac{c}{2\sqrt{ab}}$$

Dấu " = " xảy ra khi a = c và a = b (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ a = b = c $\Rightarrow$ ΔABC đều .

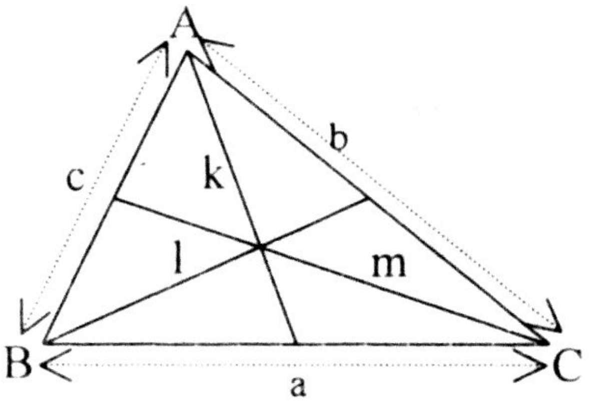
BÀI 69

Cho k, l, m là độ dài các trung tuyến , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\mathbf{k + l + m \le \frac{9R}{2}}$$

Đại học Y Dược thành phố Hồ Chí Minh(2000)

GIẢI



Gọi a, b, c là ba cạnh; k, l, m là độ dài 3 trung tuyến tương ứng ba cạnh của Δ ABC, ta có :

$$k^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \qquad (1)$$

$$l^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - b^2}{4} \qquad (2)$$

$$m^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - c^2}{4} \qquad (3)$$

Cộng (1) , (2) và (3) từng vế một ,ta có :

$$k^2 + l^2 + m^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (4)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$$(k + l + m)^2 \le 3(k^2 + l^2 + m^2)$$

$$\Rightarrow \qquad (k + l + m) \le \sqrt{3(k^2 + l^2 + m^2)} \qquad (5)$$

Thế (4) vào (5) ta có : $k + l + m \le \sqrt{\frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2)}$

$$= \sqrt{9R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2}$$

$$= 3R\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} \qquad (6)$$

Biết:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C\cos(A - B) - \cos^2 C$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\sin^2(A - B) - \left[\cos C - \frac{1}{2}\cos(A - B)\right]^2 \le \frac{9}{4} \quad (7)$$

Thế (7) vào (6) ta được bất đẳng thức: $k + l + m \le \frac{9R}{2}$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

BÀI 70

Cho tam giác ABC với BC= a ,CA =b, AB = c và có $5\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} = 1$

Chứng minh rằng : $3c = 2(a + b)$

Đại học Cần Thơ (2000, D)

GIẢI

Ta có : $5\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} = 1$

$$\Leftrightarrow \quad 5\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}) = \cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cos\frac{A+B}{2} = 2\cos\frac{A-B}{2} \quad (1)$$

Nhân 2 vế của (1) với $\sin\frac{A+B}{2} (\ne 0)$ ta được:

$$3(\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}) = 4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$3\sin(A + B) = 2(\sin A + \sin B)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin C = 2(\sin A + \sin B)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\frac{c}{2R} = 2\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3c = 2(a + b)$$

BÀI 71

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

Học viện Quan hệ Quốc tế (2000, D)

GIẢI

Chứng minh:

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2})+\cos\frac{A}{2}(\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2})$$

$$=\mathrm{tg}\frac{B}{2}(\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2})+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B+C}{2}=\mathrm{tg}\frac{B}{2}(\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2})+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

Do $\frac{A}{2}$ và $\frac{B+C}{2}$ là hai góc phụ nhau nên ta có :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\mathrm{tg}\frac{B}{2}(\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2})+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=\mathrm{tg}\frac{B}{2}(\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2})+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1=\mathrm{tg}\frac{B}{2}(\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2})+\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\mathrm{tg}\frac{B}{2}(\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}}{\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}}=\mathrm{tg}\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \operatorname{cotg}\frac{A+C}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{2} \qquad (1)$$

Biết $\frac{A+C}{2}$ và $\frac{B}{2}$ là hai góc phụ nhau nên (1) luôn đúng.

Bài 72

Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao của tam giác có bán kính vòng tròn nội tiếp bằng r. Chứng minh rằng:

$$\frac{h_b}{h_a^2}+\frac{h_c}{h_b^2}+\frac{h_a}{h_c^2}\geq\frac{1}{r}$$

Đại học Y Dược thành phố Hồ Chí Minh

GIẢI

Biết $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$ suy ra:

$$h_a=\frac{2S}{a},\ h_b=\frac{2S}{b},\ h_c=\frac{2S}{c}$$

nên ta phải chứng minh từ:

$$\frac{2S}{b}\left(\frac{a}{2S}\right)^2+\frac{2S}{c}\left(\frac{b}{2S}\right)^2+\frac{2S}{a}\left(\frac{c}{2S}\right)^2\geq\frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{2S}{r}=2p$$

Ta cũng có: $a^2+b^2\geq 2ab \Rightarrow \frac{a^2}{b}\geq 2a-b$ (1)

Tương tự: $b^2+c^2\geq 2bc \Rightarrow \frac{b^2}{c}\geq 2b-c$ (2)

$a^2+c^2\geq 2ac \Rightarrow \frac{c^2}{a}\geq 2c-a$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một suy ra:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c=2p$$

Vậy với mọi tam giác ABC có ba đường cao h_a, h_b, h_c và bán kính đường tròn nội tiếp r ta có:

$$\frac{h_b}{h_a^2}+\frac{h_c}{h_b^2}+\frac{h_a}{h_c^2}\geq\frac{1}{r}$$

Bài 73

Tam giác ABC nội tiếp một đường tròn có bán kính bằng 2 và các góc thoả mãn cotgA = 2cotgB = 3cotgC. Chứng minh tam giác ABC là tam giác nhọn và tính các cạnh a, b, c của tam giác đó.

Đại học Sư phạm Vinh (2000, A, B, E)

GIẢI

Ta có $\quad \text{cotg}(B+C)=\dfrac{\cot gB\cot gC-1}{\cot gB+\cot gC}$

$\Leftrightarrow \quad -\text{cotg}A=\dfrac{\cot gB\cot gC-1}{\cot gB+\cot gC}$

$\Leftrightarrow \quad \text{cotg}A\text{cotg}B+\text{cotg}B\text{cotg}C+\text{cotg}A\text{cotg}C=1$

$\Rightarrow \quad \text{cotg}A\,\frac{1}{2}\text{cotg}A+\frac{1}{3}\text{cotg}A.\,\frac{1}{2}\text{cotg}A+\text{cotg}A.\,\frac{1}{3}\text{cotg}A=1$

$\Rightarrow \quad \text{cotg}A=\pm1$

- Với $\text{cotg}A=-1$ thì $\text{cotg}B=-\frac{1}{2}$ và $\text{cotg}C=-\frac{1}{3}$

Như vậy các góc A, B, C đều là góc tù, vô lý.

- Với $\text{cotg}A=1$ thì $\text{cotg}B=\frac{1}{2}$ và $\text{cotg}C=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow A=45^0$, B và C là các góc nhọn.

Ta có: $1+\text{cotg}^2B=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\sin^2B}=\dfrac{5}{4}\Rightarrow\sin^2B=\dfrac{4}{5}$

Tương tự ta có: $\sin^2 C = \dfrac{9}{10}$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2}$$

$$a = 2R\sin A = 2.2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$b = 2R\sin B = 2.2.\,\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

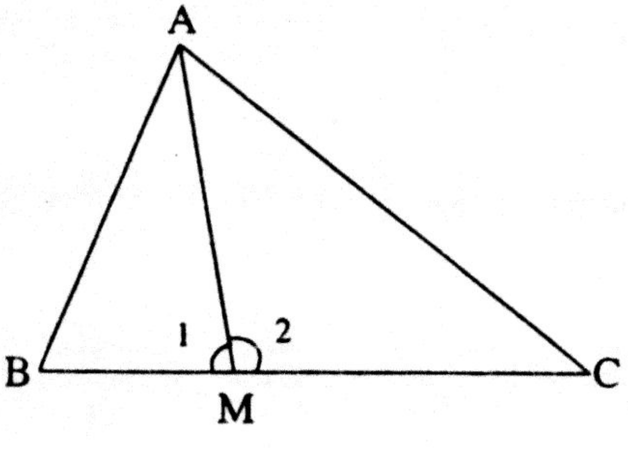
$$c = 2R\sin C = 2.2.\,\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{5}\sqrt{10}$$

Bài 74

Cho tam giác ABC. Giả sử M là điểm thay đổi trên cạnh BC. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính vòng tròn ngoại tiếp các tam giác ABM và ACM. Hãy xác định vị trí của điểm M sao cho $R_1 + R_2$ là nhỏ nhất.

Đại học Ngoại thương Cơ sở II (2000, D)

GIẢI



Theo định lý hàm số sin, trong tam giác ABM và AMC ta có:

$$\frac{AB}{\sin\widehat{M}_1} = 2R_1$$

$$\frac{AC}{\sin\widehat{M}_2} = 2R_2$$

Vì $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \pi$ nên $\sin\widehat{M}_1 = \sin\widehat{M}_2$

Do đó:

$$R_1 + R_2 = \frac{AB}{2\sin\widehat{M}_1} + \frac{AC}{2\sin\widehat{M}_1}$$

$$= \frac{1}{2\sin M_1}(AB + AC)$$

Từ (1) suy ra $R_1 + R_2$ nhỏ nhất khi sin M_1 lớn nhất băng 1

$\Leftrightarrow M_1 = 90^0$

Vậy khi AM vuông góc với BC thì tổng $M_1 + M_2$ nhỏ nhất.

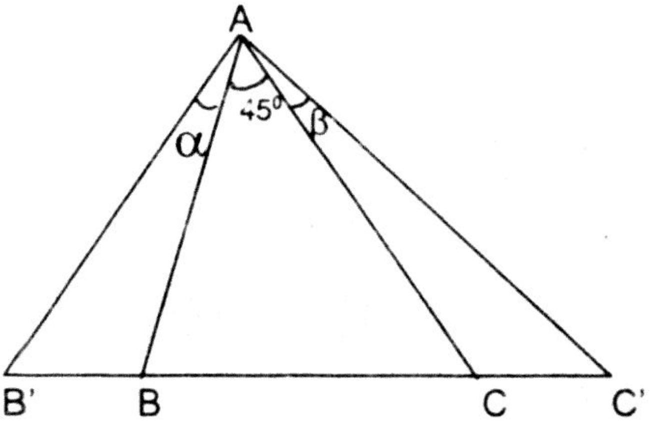
Bài 75

Cho tam giác ABC có góc A = 45⁰. Kéo dài cạnh BC về phía B một đoạn BB' và kéo dài về phía C một đoạn CC' sao cho BB' = BC = CC'. Đặt α = BAB; β = CAC'. Chứng minh rằng:

$(1 + \cot g\alpha)(1 + \cot g\beta) = 8$

Đại học Sư phạm Quy Nhơn (2000,B)

GIẢI



Ta có: $(1+\cot g\alpha)(1+\cot g\beta) =$

$= (\cot g45^0 + \cot g\alpha)(\cot g45^0 + \cot g\beta)$

$$= \frac{\sin(45^0 + \alpha)}{\sin 45^0 \sin\alpha} \cdot \frac{\sin(45^0 + \beta)}{\sin 45^0 \sin\beta}$$

$$\frac{\sin(45^0 + \alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha} \cdot \frac{\sin(45^0 + \beta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta}$$

$$= \frac{2\sin(\alpha + 45^0)\sin(\beta + 45^0)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Gọi S là diện tích tam giác AB'C bằng diện tích tam giác ABC'.

Ta có: $S = \frac{1}{2}AB'.AC\sin(\alpha+45^0) \Rightarrow \sin(\alpha+45^0) = \frac{2S}{AB'.AC}$ (2)

$S = \frac{1}{2}AB.AC'\sin(\beta+45^0) \Rightarrow \sin(\beta+45^0) = \frac{2S}{AB.AC'}$ (3)

Biết $dt\Delta AB'B = \frac{1}{2} dt\Delta AB'C = \frac{1}{2}S$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB'.AB\sin\alpha = \frac{1}{2}S$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{S}{AB'.AB} \qquad (4)$$

Tương tự:

$$dt\Delta ACC' = \frac{1}{2}dt\Delta ABC'$$

$$\frac{1}{2}AC'.AC\sin\beta = \frac{1}{2}S$$

$$\Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{S}{AC'.AC} \qquad (5)$$

Thế (2), (3), (4) và (5) vào (1) ta được:

$$(1 + \text{cotg}\alpha)(1 + \text{cotg}\beta) = \frac{2.\dfrac{2S}{AB'.AC}.\dfrac{2S}{AB.AC'}}{\dfrac{S}{AB'.AB}.\dfrac{S}{AC'.AC}} = 8 \text{ (đpcm).}$$

Bài 76

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\text{cotg}^2\frac{A}{2} + \text{cotg}^2\frac{B}{2} + \text{cotg}^2\frac{C}{2} \geq 9$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Cao đẳng Sư phạm Hà Nội (2000, A)

GIẢI

Chứng minh: $\text{cotg}^2\frac{A}{2} + \text{cotg}^2\frac{B}{2} + \text{cotg}^2\frac{C}{2} \geq 9$

Ta có:

$$\left(1\cot g\frac{A}{2} + 1\cot g\frac{B}{2} + 1\cot g\frac{C}{2}\right)^2 \leq 3\left(\cot g^2\frac{A}{2} + \cot g^2\frac{B}{2} + \cot g^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cot g^2\frac{A}{2} + \cot g^2\frac{B}{2} + \cot g^2\frac{C}{2} \geq \frac{1}{3}\left(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Biết: $\text{cotg}\frac{A}{2} = \text{tg}\frac{B+C}{2} = \dfrac{1}{\cot g\frac{B+C}{2}} = \dfrac{\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}}{\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} - 1}$

$$\Leftrightarrow \quad \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}-\cot g\frac{A}{2}=\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}=\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2} \qquad (1')$$

Với 3 số dương $\cot g\frac{A}{2}$. $\cot g\frac{B}{2}$. $\cot g\frac{C}{2}$ ta cũng có:

$$\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\geq 3\sqrt[3]{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)^3\geq 27\left(\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}\right) (2)$$

Thế (1') vào (2) ta được:

$$\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)^3\geq 27\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)^2\geq 9 \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra:

$$\cot g^2\frac{A}{2}+\cot g^2\frac{B}{2}+\cot g^2\frac{C}{2}\geq 9 \text{ (đpcm).}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\cot g\frac{A}{2}=\cot g\frac{B}{2}=\cot g\frac{C}{2}\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Bài 77

Chứng minh trong tam giác ABC để có A = 2B điều kiện cần và đủ là $a^2 = b^2 + bc$.

Học viện Kỹ thuật Quân sự

GIẢI

Ta có: $a^2 = b^2 + bc$ (1)

Từ định lý hàm số sin suy ra a = 2RsinA ; b = 2RsinB và c = 2RsinC. Từ (1) ta có hệ thức tương đương với:

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin B \sin C \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B \sin C \qquad (2)$

Vế trái: $\dfrac{1-\cos 2A}{2} - \dfrac{1-\cos 2B}{2} = \dfrac{\cos 2B - \cos 2A}{2}$

$= \sin(A+B)\sin(A-B)$

$= \sin C \sin(A-B)$

Từ (2) suy ra $\sin C.\sin(A-B) = \sin B.\sin C$

Vì $\sin C > 0$ nên $\sin(A-B) = \sin B$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A - B = B + 2k\pi \\ A - B = \pi - B + 2k\pi \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} A = 2B + 2k\pi \text{ với k nguyên, chỉ có } k = 0 \text{ là thích hợp, vậy } A = 2B \\ A = \pi + 2k\pi \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy để có $A = 2B$ thì điều kiện cần và đủ là $a^2 = b^2 + bc$

Bài 78

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$a^3\sin(B-C) + b^3\sin(C-A) + c^3\sin(A-B) = 0$$

trong đó A, B, C là ba góc; a, b, c là độ dài ba cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C. Học Viện Phòng không Không quân (2001)

GIẢI

$$a^3\sin(B-C) + b^3\sin(C-A) + c^3\sin(A-B) \qquad (1)$$

Biết $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, và $c = 2R\sin C$ nên từ (1) suy ra:

$\sin^2 A.\sin A\sin(B-C) + \sin^2 B.\sin B\sin(C-A) + \sin^2 C.\sin C\sin(A-B) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 A.\sin(B+C)\sin(B-C) + \sin^2 B.\sin(C+A)\sin(C-A) + \sin^2 C.\sin(A+B)\sin(A-B) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 A.\dfrac{1}{2}(\cos 2C - \cos 2B) + \sin^2 B.\dfrac{1}{2}(\cos 2A - \cos 2C) + \sin^2 C.\dfrac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 A[(1-2\sin^2 C) - (1-2\sin^2 B)] + \sin^2 B[(1-2\sin^2 A) - (1-2\sin^2 C)] + \sin^2 C[(1-2\sin^2 B) - (1-2\sin^2 A) = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 A\sin^2 C + 2\sin^2 A\sin^2 B - 2\sin^2 B\sin^2 A + 2\sin^2 B\sin^2 C - 2\sin^2 C\sin^2 B + 2\sin^2 C\sin^2 A = 0$

Do đó (1) luôn đúng.

BÀI 79

Với A, B, C là ba góc của một gam giác. Chứng minh rằng:

$$tg5A + tg5B + tg5C = tg5Btg5C$$

Đại học Dân lập Hải Phòng (2000)

GIẢI

Biết $A + B + C = \pi \Rightarrow 5C = 5\pi - (5A + 5B)$

$$tg5C = tg[(5\pi - (5A + 5B)]$$
$$= tg[\pi - (5A + 5B)$$
$$= -tg\,(5A + 5B)$$

$$\Leftrightarrow \quad tg5C = -\frac{tg5A + tg5B}{1 - tg5Atg5B}$$

$$\Leftrightarrow \quad tg5C - tg5Atg5Btg5C = -tg5A - tg5B$$

$$\Leftrightarrow \quad tg5A + tg5B + tg5C = tg5Atg5Btg5C$$ (đpcm).

BÀI 80

a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện a<b<c. Hãy chứng minh rằng:

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) < 0$$

Đại học Ngoại ngữ Hà Nội (2000)

GIẢI

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^3b^2 - a^3c^2 + b^3c^2 - b^3a^2 + c^3(a^2 - b^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2b^2(a - b) - c^2(a^3 - b^3) + c^3(a^2 - b^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b)[a^2b^2 - c^2a^2 - c^2ab - c^2b^2 + c^3(a - b)] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b)[a^2(b^2 - c^2) - ac^2(b-c) - c^2b(b - c)] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b)(b - c)[a^2(b + c) - ac^2 - c^2b] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b)(b - c)[b(a^2 - c^2) + ac(a - c)] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b)(b - c)(a - c)(ba + bc + ac) < 0$$

Với $a < b < c$ thì bất đẳng thức trên luôn đúng

BÀI 81

Cho tam giác ABC bất kỳ. Chứng minh rằng:

(1 - cosA)(1 - cosB)(1 - cosC) ≥ cosAcosBcosC

Đại học Dược Hà Nội

GIẢI

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\geq \cos A\cos B\cos C\ \forall\Delta ABC$$

* Trường hợp 1: ΔABC vuông hoặc tù

$$\Leftrightarrow (1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\geq \cos A\cos B\cos C$$

* Trường hợp 2: ΔABC nhọn

$$\text{đpcm} \Leftrightarrow \left(2\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{C}{2}\right)\geq \frac{1-\text{tg}^2\frac{A}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{A}{2}}.\frac{1-\text{tg}^2\frac{B}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{B}{2}}.\frac{1-\text{tg}^2\frac{C}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{C}{2}\right)\geq \frac{1-\text{tg}^2\frac{A}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}}.\frac{1-\text{tg}^2\frac{B}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}}.\frac{1-\text{tg}^2\frac{C}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\text{tg}^2\frac{A}{2}\right)\left(2\text{tg}^2\frac{B}{2}\right)\left(2\text{tg}^2\frac{C}{2}\right)\geq\left(1-\text{tg}^2\frac{A}{2}\right).\left(1-\text{tg}^2\frac{B}{2}\right).\left(1-\text{tg}^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\text{tg}\frac{A}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{A}{2}}.\frac{2\text{tg}\frac{B}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{B}{2}}.\frac{2\text{tg}\frac{C}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{C}{2}}\geq\frac{1}{\text{tg}\frac{A}{2}}.\frac{1}{\text{tg}\frac{B}{2}}.\frac{1}{\text{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C\geq \cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2}$$

ΔABC không vuông, nên $\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C = \text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C$

$$\cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2}=\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}$$

$$\text{Biết}\quad tgA + tgB = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = \frac{\sin C}{\cos A\cos B}$$

$$= \frac{2\sin C}{\cos(A+B)+\cos(A-B)} = \frac{2\sin C}{\cos(A-B)-\cos C}$$

$$\geq \frac{2\sin C}{1-\cos C} = \frac{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin^2\frac{C}{2}} = 2\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad tgA + tgB \geq 2cotg\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Tương tự: $$tgB + tgC \geq 2cotg\frac{A}{2} \qquad (2)$$

$$tgC + tgA \geq 2cotg\frac{B}{2} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế ta được:

$$tgA + tgB + tgC \geq cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 82

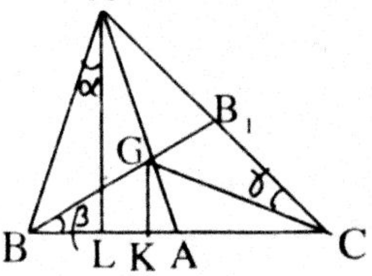
Cho ΔABC, giả sử G là giao điểm của các đường trung tuyến. Đặt $\widehat{GAB} = \alpha$, $\widehat{GBC} = \beta$, $\widehat{GCA} = \gamma$. Chứng minh:

$$\mathbf{cotg\,\alpha + cotg\,\beta + cotg\,\gamma = \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4S}}$$

trong đó a = BC, b = CA, c = AB, S là diện tích ΔABC.

Đại học Ngoại thương Hà Nội (2000, A)

GIẢI



Chứng minh: $cotg\,\alpha + cotg\,\beta + cotg\,\gamma = \dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{4S}$

Theo định lý hàm số cosin trong ΔABC ta có

$$GA^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB.AG\cos\alpha$$

$$= AB^2 + AG^2 - 4.\frac{1}{2}AB.AG\sin\alpha\, cotg\,\alpha$$

$$GA^2 = AB^2 + AG^2 - 4S_{\Delta ABG}\, cotg\,\alpha$$

$$\Leftrightarrow \qquad 4S_{\Delta ABG}\,\text{cotg}\alpha = AB^2 + AG^2 - GB^2 \qquad (1)$$

Ta có: $S_{\Delta GAB} = \frac{1}{2}BC.GK = \frac{1}{2}BC.\frac{1}{3}AL = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$ (2)

Thế (2) vào (1) ta được:

$$\frac{4}{3}S_{\Delta ABC}\cot g\alpha = AB^2 + AG^2 - GB^2 \qquad (3)$$

Tương tự ta có: $\frac{4}{3}S_{\Delta ABC}\cot g\beta = BC^2 + BG^2 - GC^2$ (4)

$$\frac{4}{3}S_{\Delta ABC}\cot g\gamma = AC^2 + GC^2 - AG^2 \qquad (5)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một ta được:

$$\frac{4}{3}S_{\Delta ABC}(\cot g\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = AB^2 + BC^2 + CA^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{4}{3}S_{\Delta ABC}(\cot g\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad \cot g\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 3\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \text{ (đpcm)}$$

Bài 83

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta luôn có:

$$\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Đại học Ngoại thương TP. Hồ Chí Minh (2001,D)

GIẢI

$$\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} \qquad (1)$$

Tính vế trái: $\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \quad (2)$$

và mẫu số: $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) = 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad (3)$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$= 3 + \cos A + \cos B + \cos C \quad (4)$$

Thay (2), (3) vào (4) ta được:

$$4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) + 2\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A+C}{2} + \cos\frac{A-C}{2}\right)$$

$$+ 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$= 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 2\sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$+ 2\sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 1 - \cos A + \cos B + \cos C + 1 - \cos B + \cos A + \cos C$$

$$+ 1 - \cos C + \cos A + \cos B$$

$$= 3 + \cos A + \cos B + \cos C$$

Như vậy VT của (4) bằng $3 + \cos A + \cos B + \cos C$

$\Rightarrow$ (1) luôn đúng.

Bài 84

Tính các góc của tam giác ABC nếu các góc A, B, C của tam giác đó thoả mãn hệ thức:

$$\mathbf{\cos 2A + \sqrt{3}\,(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{5}{2} = 0}$$

Đại học Sư phạm Hà Nội (B, M, T)

GIẢI

$$\cos 2A + \sqrt{3}\,(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{5}{2} = 0 \qquad (1)$$

Biết $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ và $\cos 2B + \cos 2C = 2\cos(B + C)\cos(B - C)$ nên

$(1) \Leftrightarrow\ 2\cos^2 A - 1 + 2\sqrt{3}\cos(B + C)\cos(B - C) + \frac{5}{2} = 0$

$\Leftrightarrow\ 4\cos^2 A - 4\sqrt{3}\cos A\cos(B - C) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow\ [(2\cos A - \sqrt{3}\cos(B - C)]^2 + 3\sin^2(B - C) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos A - \sqrt{3}\cos(B - C) = 0 \\ \sin(B - C) = 0 \end{cases}$$

* Với $\sin(B - C) = 0 \Leftrightarrow B = C + k\pi\ (k \in Z)$

Vì $0 < B, C < \pi$ nên $k = 0 \Rightarrow B = C$

* Với $B = C$ thì $2\cos A - \sqrt{3}\cos 0^0 = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vì $0 < A < \pi$ nên $A = \frac{\pi}{6}$ và $B = C = \frac{\pi - A}{2} = \frac{5\pi}{2}$

Vậy các góc tam giác là $A = \frac{\pi}{6}$ và $B = C = \frac{5\pi}{2}$

Bài 85

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh a, b, c và diện tích S thoả mãn: $S = (c + a - b)(c + b - a)$. Chứng minh: $tgC = \frac{8}{15}$

Đại học Thuỷ lợi (2001)

GIẢI

Ta có: $[c + (a - b)][c - (a - b)] = c^2 - (a + b)^2 + 2ab$

$= - 2ab\cos C + 2ab$

$= 2ab(1 - \cos C) = 4ab\sin^2\frac{C}{2}$ và $S = \frac{1}{2}ab\sin C$

Do đó hệ thức đã cho là: $\frac{1}{2}ab\sin C = 4ab\sin^2\frac{C}{2}$

$$\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sin^2\frac{C}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{4}$$

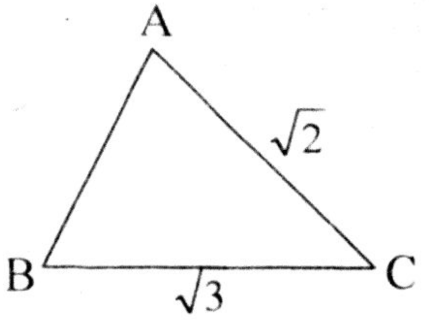
Biết $\operatorname{tg}C = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}} = \dfrac{2.\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \dfrac{8}{15}$

Bài 86

Cho tam giác ABC có $A = 120^0$, $BC = \sqrt{3}$ và $AC = \sqrt{2}$. Tính số đo góc C. Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh (2001, khối D)

GIẢI

Trong tam giác ABC theo định lý hàm số cos ta có:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 120^0$$

$$3 = AB^2 + 2 - 2AB.\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

Theo định lý hàm số sin ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin C = \frac{AB}{BC}\sin A = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Biết $\cos 2C = 1 - 2\sin^2 C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 2C = \cos 30^0 \Rightarrow C = 15^0$

Bài 87

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{4}+\mathrm{tg}\frac{B}{4}+\mathrm{tg}\frac{C}{4}+\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}+\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}+\mathrm{tg}\frac{C}{4}\mathrm{tg}\frac{A}{4}-\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}=1$$

Học viện Quan hệ Quốc tế (2001)

GIẢI

Trong Δ ABC ta có: $\frac{A+B+C}{4}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{A}{4}+\frac{B}{4}=\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}$

Do đó $\mathrm{tg}\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{4}\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{tg}\frac{A}{4}+\mathrm{tg}\frac{B}{4}}{1-\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}}=\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\mathrm{tg}\frac{C}{4}}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}} \quad (1)$$

Biết $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$ nên từ (1) suy ra:

$$\left(\mathrm{tg}\frac{A}{4}+\mathrm{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1+\mathrm{tg}\frac{C}{4}\right)=\left(1-\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\right)\left(1-\mathrm{tg}\frac{C}{4}\right)$$

$$\mathrm{tg}\frac{A}{4}+\mathrm{tg}\frac{B}{4}+\mathrm{tg}\frac{C}{4}+\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}=1-\mathrm{tg}\frac{C}{4}\mathrm{tg}\frac{A}{4}-\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}+\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}$$

$$\mathrm{tg}\frac{A}{4}+\mathrm{tg}\frac{B}{4}+\mathrm{tg}\frac{C}{4}+\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}+\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}+\mathrm{tg}\frac{C}{4}\mathrm{tg}\frac{A}{4}-\mathrm{tg}\frac{A}{4}\mathrm{tg}\frac{B}{4}\mathrm{tg}\frac{C}{4}=1$$

Bài 88

Chứng minh rằng không tồn tại tam giác mà cả ba góc trong của nó đều là nghiệm của phương trình:

$$(4\cos x-1)\left[7\sin^2x-\frac{1}{2}\sin 2x-6\right]=0$$

Đại học Mỏ - Địa chất (2000)

GIẢI

Ta có: $(4\cos x - 1)\left[7\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x - 6\right] = 0 \qquad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \cos x = \frac{1}{4} & (2) \\ 7\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x - 6 = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Do $\cos x \neq 0$ nên chia cả hai vế của (3) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$7tg^2x - tgx - 6(1 + tg^2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad tg^2x - tgx - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -2 \\ tgx = 3 \end{array}\right.$$

x là góc của tam giác nên $0 < x < \pi$, vì $\cos x = \frac{1}{4} > 0$ nên suy ra

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ và $tgx > 0$

Ta có: $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - 1 = 15 \Rightarrow tgx = \sqrt{15}$

Do đó cả ba góc của tam giác là nghiệm của phương trình thì các

nghiệm đó là: $\left\{\begin{array}{l} tgx = -2 = tgA \\ tgx = 3 = tgB \\ tgx = \sqrt{15} = tgC \end{array}\right.$

Trong ΔABC ta có: $tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC \qquad (4)$

Vì vế phải của (4) là dương, vế trái của (4) có giá trị âm nên không tồn tại tam giác mà cả ba góc là nghiệm của phương trình đã cho.

II. TAM GIÁC CÂN :

BÀI 1

Chứng tỏ rằng nếu trong tam giác ABC ta có:

$$\mathbf{tgA + tgB = 2cotg\frac{C}{2}}\ \textbf{thì ABC là tam giác cân}$$

Đại học Đà Lạt (1995)

GIẢI

Ta có: $\quad \text{tgA} + \text{tgB} = 2\text{cotg}\frac{C}{2} \qquad (1)$

Biết $A + B + C = \pi$ nên $\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$

và $\quad \text{tgA} + \text{tgB} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = \frac{\sin C}{\cos A\cos B} = \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A\cos B}$

Do đó (1) tương đương:

$$\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A\cos B} = 2\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad (2)$$

vì $\quad \cos\frac{C}{2} > 0$ nên từ (2) ta suy ra:

$$2\cos A\cos B = 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$\Leftrightarrow\ \cos(A+B) + \cos(A-B) = 1 - \cos C = 1 + \cos(A+B)$

suy ra $\cos(A-B) = 1 = \cos 0^0$

Do $-\pi < A-B < \pi$ nên $A-B = 0 \ \Rightarrow A = B$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

Cách khác: Từ (1) ta suy ra:

$$\text{tg}A + \text{tg}B - 2\text{tg}\frac{A+B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}A - \text{tg}\frac{A+B}{2} + \text{tg}B - \text{tg}\frac{A+B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}} + \frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}} = 0 \text{ , vì } \cos\frac{A+B}{2} \neq 0$$

nên rút gọn ta có: $\sin\frac{A-B}{2}\left(\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\cos B}\right) = 0$

Do đó: $\sin\frac{A-B}{2} = 0$ hoặc $\cos A = \cos B$ suy ra A=B và ΔABC là tam giác cân tại C.

BÀI 2

Tam giác ABC có các góc và các cạnh thoả mãn hệ thức:

$$\frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác cân.

Đ.H. Y khoa Hà Nội (1996)

GIẢI

Ta có: $$\frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c} \qquad (1)$$

Cộng thêm 1 vào hai vế của hệ thức (1) ta có:

$$1 + \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = 1 + \frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos B+1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a-c+2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{2}{1-\cos B} = \frac{4a}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 4a - 2c = 4a - 4a\cos B$$

$$\Leftrightarrow \qquad c = 2a\cos B \qquad (2)$$

Biết $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ suy ra $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ (3)

Thay cosB ở (3) vào (2) ta có:

$$c = 2a\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \Leftrightarrow c^2 = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

Do đó, tam giác ABC là tam giác cân ở C

BÀI 3

Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC có:

$$a\cot g\frac{C}{2} + b\cot g\frac{C}{2} = b\,tgB + a\,tgA$$

thì ABC là tam giác cân.

Đại học Biên phòng (1996)

GIẢI

Ta có: $a\cot g\frac{C}{2} + b\cot g\frac{C}{2} = b\,tgB + a\,tgA$

$$\Leftrightarrow \qquad a\,tg\frac{A+B}{2} + b\,tg\frac{A+B}{2} - b\,tgB - a\,tgA = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad a\left(tg\frac{A+B}{2} - tgA\right) + b\left(tg\frac{A+B}{2} - tgB\right) = 0 \qquad (1)$$

Thế a = 2RsinA, b = 2RsinB, c = 2RsinC và tính

$\text{tg}\frac{A+B}{2} - \text{tg}A$, $\text{tg}\frac{A+B}{2} - \text{tg}B$; rồi rút gọn (1) ta có:

$$\text{tg}A\sin\frac{B-A}{2} + \text{tg}B\sin\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\sin\frac{A-B}{2}(\text{tg}B - \text{tg}A) = 0$$

* Với $\sin\frac{A-B}{2} = 0$ ta suy ra $A = B$, do đó ABC là tam giác cân.

* Với $\text{tg}B - \text{tg}A = 0$ ta suy ra $B=A$, do đó ABC là tam giác cân.

BÀI 4

Tam giác ABC có các góc A, B, C với các cạnh đối diện có độ dài a, b, c tương ứng thoả mãn hệ thức:

$$\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác cân.

Đại học Huế (1996, A, B)

GIẢI

Ta có: $$\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$$

Bình phương 2 vế và áp dụng công thức nhân đôi, ta có:

$$\left(\frac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)^2 = \frac{(2a+c)^2}{4a^2 - c^2}$$

hay $$\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}} = \frac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow 1 + \cot g^2\frac{B}{2} = 1 + \frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} = \frac{4a}{2a-c} \quad \Leftrightarrow \quad 2a - c = 2a(1 - \cos B)$$

$$\Leftrightarrow \quad c = 2a\cos B \qquad \Rightarrow \quad c^2 = 2ac\cos B$$

Theo định lý hàm số cosin ta suy ra: $c^2 = a^2 + c^2 - b^2 \Rightarrow a = b$.

Vậy ΔABC là tam giác cân.

BÀI 5

Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$\frac{2(\cos^2 A + \cos^2 B)}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \cot g^2 A + \cot g^2 B$$

thì tam giác ABC cân.

Đại học Dân lập Phương Đông (1997)

GIẢI

Ta có: $\frac{2(\cos^2 A + \cos^2 B)}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \cot g^2 A + \cot g^2 B$

$$2(\cos^2 A + \cos^2 B) = (\cot g^2 A + \cot g^2 B)(\sin^2 A + \sin^2 B)$$
$$= \cot g^2 A\sin^2 A + \cot g^2 A\sin^2 B + \cot g^2 B\sin^2 A + \cot g^2 B\sin^2 B$$
$$= \cos^2 A + \cot g^2 A\sin^2 B + \cot g^2 B\sin^2 A + \cos^2 B$$

Rút gọn:

$$\cos^2 A + \cos^2 B = \cot g^2 A\sin^2 B + \cot g^2 B\sin^2 A$$
$$\Leftrightarrow \quad (\cos^2 A - \cot g^2 A\sin^2 B) + (\cos^2 B - \cot g^2 B\sin^2 A) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \cot g^2 A\,(\sin^2 A - \sin^2 B) + \cot g^2 B\,(\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (\cot g^2 A - \cot g^2 B)(\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$$

Do đó, ta có:

* $\cot g^2 A - \cot g^2 B = 0$

$\cot g^2 A = \cot g^2 B$

$\text{cotg}A = \pm\text{cotg}B$ chỉ nhận $\text{cotg}A = \text{cotg}B$

(vì nếu $\text{cotg}A = -\text{cotg}B$ thì A và B là 2 góc bù nhau)

Vậy: $A = B$

* hoặc $\sin^2 A - \sin^2 B = 0$

$$\sin^2 A = \sin^2 B$$

$\sin A = \sin B$ suy ra $A = B$

(Chỉ nhận giá trị dương vì sinA và sinB có giá trị dương)

Vậy ABC là tam giác cân.

BÀI 6

Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thoả mãn $\text{tg}A.\text{tg}B = \text{cotg}^2\dfrac{C}{2}$ thì ABC là tam giác vuông hoặc cân.

GIẢI

Ta có : $\text{tg}A.\text{tg}B = \text{cotg}^2\dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\cos^2\dfrac{C}{2}}{\sin^2\dfrac{C}{2}} = \frac{1+\cos C}{1-\cos C}$$

$\Leftrightarrow \sin A \sin B\,(1 - \cos C) = \cos A \cos B(1 + \cos C)$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B - \sin A \sin B + \cos C\,(\cos A\cos B + \sin A \sin B) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(A + B) + \cos C\,(\cos(A - B)) = 0$

$\Leftrightarrow -\cos C + \cos C\,(\cos(A - B)) = 0$

$\Leftrightarrow \cos C\,[\cos(A - B) - 1] = 0$

Từ đó suy ra , nếu $\cos C = 0$ thì $C = 90^0$, nếu $\cos(A - B) = 1$ thì $A = B$. Vậy tam giác ABC thoả mãn $\text{tg}A.\text{tg}B = \text{cotg}^2\dfrac{C}{2}$ thì tam giác ABC là vuông hoặc cân.

BÀI 7

Các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Học viện Quan hệ Quốc tế

GIẢI

Ta có:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Tử số:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Tương tự, ta có:

$$\sin A + \sin B - \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}.\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(-2\sin\frac{A}{2}\right)\left(-\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (3)$$

Do đó:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}$$

Kết quả này so với (1) ta có:

$$\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2} = \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

Suy ra B = C $\Rightarrow$ ABC là tam giác cân.

BÀI 8

1. Giải phương trình: $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 10$

2. Tam giác ABC có đặc điểm gì, nếu các góc của nó thoả mãn hệ thức:

$$\frac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$$

Đại học Ân ninh Hà Nội (1999, D)

GIẢI

1. Ta có: $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 10$ **(1)**

Đặt $9^{\sin^2 x} = t$ thì $9^{\cos^2 x} = 9^{1-\sin^2 x} = \frac{9}{t}$

Do $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên $9^0 \le 9^{\sin^2 x} \le 9^1$

$$\Rightarrow \qquad 1 \le t \le 9$$

Từ (1) ta có:

$$t + \frac{9}{t} = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 9 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 9^{\sin^2 x} = 1 \\ 9^{\sin^2 x} = 9 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{array}\right.$$

Giải ra, ta được: $\boxed{x = \frac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

2. Ta có:

$$\frac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C = 2\sin B\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C = \sin(B + A) + \sin(B - A)$$

$$= \sin C + \sin(B - A)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(B - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A = B$$

Tam giác ABC có hai góc A = B nên là tam giác cân.

BÀI 9

Chứng minh rằng tam giác ABC có các góc A, B, C thoả mãn điều kiện:

$$\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$$

thì tam giác đó cân.

Đại học Thương mại (1999)

GIẢI

Điều kiện đã cho:

$$\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2} \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^3\frac{A}{2}-\operatorname{tg}^3\frac{B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+1\right)=0 \qquad (2)$$

Do $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$ và $0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$ nên $\operatorname{tg}\frac{A}{2}>0$ và $\operatorname{tg}\frac{B}{2}>0$

Do đó: $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+1>0$

Từ (2) suy ra: $\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}=0$

hay $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{A}{2} = \frac{B}{2} \qquad \Leftrightarrow \quad A = B$$

Vậy ABC là tam giác cân.

BÀI 10

1. Giải phương trình:

$$\mathbf{tg2x + sin2x = \frac{3}{2}cotgx}$$

2. Cho tam giác ABC thoả mãn hệ thức:

$$\mathbf{2cosAsinBsinC + \sqrt{3}\,(sinA + cosB + cosC) = \frac{17}{4}}$$

Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Đại học Thuỷ lợi (1999)

GIẢI

1. Ta có: $\text{tg}2x + \sin 2x = \frac{3}{2}\text{cotg}x$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases}$

Từ (1) ta có phương trình tương đương:

$$\text{tg}2x(1 + \cos 2x) = \frac{3}{2}.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x(1 + \cos 2x).2\sin x = 3\cos 2x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x.2\cos^2 x.2\sin x = 3\cos 2x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 2x\cos x = 3\cos 2x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x[3\cos 2x - 2\sin^2 2x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x[3\cos 2x - 2(1 - \cos^2 2x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

* Với $\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \quad (k \in Z)$

* Với $2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -2 \quad \text{(loại)} \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

2. Hệ thức đã cho:

$$2\cos A\sin B\sin C + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4} \qquad (2)$$

Theo định lý hàm số cosin ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)}{8R^2 \sin B \sin C}$$

$$2\cos A\sin B\sin C = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$$

Do đó (2) có thể viết:

$$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 B + 1 - \cos^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \left(\cos^2 C - \sqrt{3}\cos C\right) - \left(\cos^2 B - \sqrt{3}\cos B\right) - \left(\sin^2 A - \sqrt{3}\sin A\right) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \left[\left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right] - \left[\left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right] - \left[\left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right] = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos C = \cos B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin 30^0 \\ \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = C = 120^0 \\ A = 120^0 \end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC cân có góc đỉnh $A = 120^0$

Bài 11

Tam giác ABC có các góc A, B, C thoả mãn hệ thức:

$\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$ **. Chứng minh A = B**

Cao đẳng Kinh doanh (2000, D)

GIẢI

Ta có : $\dfrac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$

$$\Leftrightarrow \sin C = 2\sin B\cos A$$

$$= \sin(B + A) + \sin(B - A)$$

$$= \sin C + \sin(B - A)$$

$\Rightarrow \sin(B - A) = 0 \Rightarrow B = A$ (đpcm)

Bài 12

Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$c^2 \sin 2A + a^2 \sin 2C = b^2 \operatorname{cotg}\dfrac{B}{2}$ **.Hãy xác định dạng của tam giác đó**

Đại học Thái Nguyên (2001, A và B)

GIẢI

Ta có $c^2\sin 2A + a^2\sin 2C = b^2\text{cotg}\dfrac{B}{2}$ (1)

Biết $c = 2R\sin C$, $a = 2R\sin A$ và $b = 2R\sin B$ nên từ (1) suy ra

$$(2R\sin C)^2\sin 2A + (2R\sin A)^2\sin 2C = (2R\sin B)^2\text{cotg}\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin A\sin C.\,(\sin C\cos A + \sin A\cos C) = \sin^2 B\,.\,\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin A\sin C.\sin B = \sin^2 B\,\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin A\sin C = 2\cos^2\frac{B}{2} = 1 + \cos B$$

$$\Leftrightarrow\ \cos(A - C) - \cos(A + C) = 1 + \cos B \qquad (2)$$

$A + C$ và B là hai góc bù nhau nên $\cos(A + C) = -\cos B$

và (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos(A - C) = 1\\ -\pi < A - C < \pi\end{cases}$

Do đó $A - C = 0 \Rightarrow A = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại B.

III. TAM GIÁC VUÔNG :

BÀI 1

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là:

$$\mathbf{\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B}$$

Đại học Kinh tế T.P. Hồ Chí Minh (1990)

GIẢI

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B$

$\Leftrightarrow\ 2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B = 4\sin A\sin B$

$\Leftrightarrow\ \sin A\cos A + \sin B\cos B = 2\sin A\sin B$

$\Leftrightarrow\ \sin A(\cos A - \sin B) + \sin B(\cos B - \sin A) = 0$

$$\Leftrightarrow\ \sin A\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \sin B\right] + \sin B\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \sin A\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A.2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B-A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}\right)$$

$$+\sin B.2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A+B}{2}\right)\left[\sin A\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B-A}{2}\right)+\sin B\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)\right]=0 \quad (1)$$

Biết $\quad \cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x)$$

Suy ra

$$\sin A.\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B-A}{2}\right)=\sin A.\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{B-A}{2}-\sin\frac{B-A}{2}\right)\right] \quad (2)$$

$$\sin B.\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)=\sin B.\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{A-B}{2}\right)\right]$$

$$=\sin B.\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{B-A}{2}+\sin\frac{B-A}{2}\right)\right] (3)$$

Cộng (2) và (3) ta được:

$$\sin A\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B-A}{2}\right)+\sin B\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A-B}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{B-A}{2}(\sin A+\sin B)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{B-A}{2}(\sin B-\sin A)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{B-A}{2}(\sin A+\sin B)+\frac{1}{\sqrt{2}}2\sin^2\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A}{2}>0 \quad (4)$$

Do $-\frac{\pi}{2}<B-A<\pi$ nên $\frac{B-A}{2}<\frac{\pi}{2}$, suy ra $\cos\frac{B-A}{2}>0$

và $\sin A > 0, \sin B > 0 \Leftrightarrow$ (4) đúng

Từ đó, ở (1) chỉ có $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2}$$

Suy ra $C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ tam giác ABC vuông tại C.

BÀI 2

Chứng tỏ rằng nếu trong tam giác ABC có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$$

thì ABC là tam giác vuông.

Đại học Huế (1995)

GIẢI

Ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$1 - \cos A + \cos B + \cos C = 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Theo bài ra, ta có:

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Do đó suy ra: $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2}$ hay $\text{tg}\frac{A}{2} = 1 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$

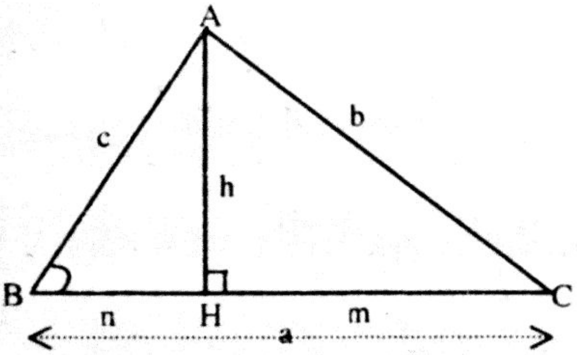
Vậy ABC là tam giác vuông tại A.

BÀI 3

Trong tam giác ABC, H là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Gọi p, p_1, p_2 lần lượt là nửa chu vi của các tam giác ABC, ABH và ACH. Cho biết $p^2 = p_1^2 + p_2^2$. Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

Đại học Huế (1995)

GIẢI



Đặt: AH=h ; BC=a ; BH=n ; HC=m

AB = c ; AC = b. Ta có

Chu vi ΔABC là $2p = c + n + m + b$

$$= \frac{h}{\sin B} + h\cot gB + h\cot gC + \frac{h}{\sin C}$$

$$= h\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} + \frac{\cos C}{\sin C}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{2}h\left(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{1}{4}h^2\left(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Chu vi ΔABH là: $2p_1 = c + n + h$

$$= \frac{h}{\sin B} + h\cot gB + h = h\left(1 + \cot g\frac{B}{2}\right)$$

nên $$p_1^2 = \frac{1}{4}h^2\left(1 + \cot g\frac{B}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Chu vi ΔACH là: $2p_2 = b + m + h$

$$= \left(\frac{h}{\sin C} + h\cot gC + h\right) = h\left(1 + \cot g\frac{C}{2}\right)$$

nên $$p_2^2 = \frac{1}{4}h^2\left(1 + \cot g\frac{C}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

Theo đầu bài : $p^2 = p_1^2 + p_2^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}h^2\left(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}h^2\left[\left(1 + \cot g\frac{B}{2}\right)^2 + \left(1 + \cot g\frac{C}{2}\right)^2\right] \quad (4)$$

Khai triển và rút gọn (4) ta được:

$$\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} - 1 = \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot g\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 1 = \cot g\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B + C = \dfrac{\pi}{2} \\ A = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy ΔABC vuông tại A.

BÀI 4

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông khi và chỉ khi các góc A, B, C của nó thoả mãn hệ thức:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$$

Đại học Dân lập Thăng Long (1996)

GIẢI

Từ hệ thức đã cho, ta suy ra:

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2B) + \cos^2 C - 1 = 0 \qquad (1)$$

Biết $A + B = \pi - C$ nên $\cos(A + B) = -\cos C$ nên (1) trở thành:

$$\frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2(A + B) = 0$$

$$\frac{1}{2}.2\cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2(A + B) = 0$$

$$\cos(A + B)[\cos(A - B) + \cos(A + B)] = 0$$

$$-\cos C.(\ 2\cos A.\cos B) = 0$$

Do đó hoặc $\cos A = 0$ suy ra $A = 90^0$

hoặc $\cos B = 0$, $\cos C = 0$. Vậy ABC là tam giác vuông.

BÀI 5

Tam giác ABC có diện tích S và các cạnh BC= a, AC=b, AB=c. Chứng minh rằng nếu:

$$S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a + c - b)$$

thì ABC là tam giác vuông.

GIẢI

Ta có: $S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a + c - b)$

$$\Leftrightarrow S^2 = \frac{1}{16}(a + b - c)^2(a + c - b)^2 \qquad (1)$$

Theo công thức Hêrông ta có:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)} \qquad (2)$$

Bình phương hai vế của (2) thì (2) và (1) bằng nhau, ta có:

$$(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) = (a + b - c)^2(a + c - b)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (a + b + c)(b + c - a) = (a + b - c)(a + c - b)$$

$$\Leftrightarrow \quad (b + c + a)(b + c - a) = [a - (c - b)][a + (c - b)]$$

$$\Leftrightarrow \quad (b + c)^2 - a^2 = a^2 - (c - b)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + 2bc + c^2 - a^2 = a^2 - (c^2 - 2bc + b^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 = a^2$$

Tam giác ABC có "bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh còn lại" là tam giác vuông (định lý Pi ta go).

BÀI 6

Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn điều kiện:

$$3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

Đại học Cần Thơ (1996)

GIẢI

Ta có: $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$

$$\Leftrightarrow \quad (3\cos B + 4\sin B) + 2(3\sin C + 4\cos C) = 15$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có: $3\cos B + 4\sin B \le 15$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{\cos B}{3} = \dfrac{\sin B}{4}$ và $4\sin B + 3\cos B = 5 \qquad (1)$

Tương tự, ta có:

$$2(3\sin C + 4\cos C) \le 10$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{\sin C}{3} = \dfrac{\cos C}{4}$ và $3\sin C + 4\cos C = 5$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\operatorname{tg}B = \operatorname{cotg}C = \frac{4}{3} \qquad \left(B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}B = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$\Rightarrow \quad B = \dfrac{\pi}{2} - C \Rightarrow$ góc B và C phụ nhau nên tam giác ABC vuông tại A.

BÀI 7

Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c và các góc A, B, C, giả thiết $\dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C} = \dfrac{a}{\sin B.\sin C}$. Chứng minh tam giác ABC vuộng.

GIẢI

Theo định lý hàm số sin ta có: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$ và $c = 2R\sin C$. Do đó:

$$\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B.\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2R\sin B}{\cos B} + \frac{2R\sin C}{\cos C} = \frac{2R\sin A}{\sin B.\sin C} \qquad (1)$$

Biến đổi vế trái của (1)

$$\frac{2R(\sin B\cos C + \sin C\cos B)}{\cos B.\cos C} = \frac{2R\sin(B + C)}{\cos B.\cos C} = \frac{2R\sin A}{\cos B.\cos C} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\cos B\cos C = \sin B.\sin C$

$$\Leftrightarrow \quad \cos B\cos C - \sin B\sin C = \cos(B + C) = 0$$

$$\Rightarrow \quad B + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$$

Do đó ABC là tam giác vuông tại A.

BÀI 8

Tam giác ABC có: cos2A + cos2B + cos2C = - 1
Chứng minh ABC là tam giác vuông.

GIẢI

Ta có: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1 = -1$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos C[\cos C - \cos(A - B)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos C[-\cos(A + B) - \cos(A - B)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C[2\cos A.\cos(- B)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos A.\cos B.\cos C = 0$

Với cosA = 0 hoặc cosB = 0 hoặc cosC = 0 thì $A = 90^0$, $B = 90^0$ hoặc $C = 90^0$

Vậy ABC là tam giác vuông.

BÀI 9

Chứng minh rằng tam giác ABC là vuông hoặc cân khi và chỉ khi: acosB – bcosA = asinA – bsinB trong đó a = BC, b = AC và c = AB

GIẢI

Ta có:

$a = 2R\sin A$ và $b = 2R\sin B$

Do đó hệ thức đã cho trở thành:

$2R\sin A\cos B - 2R\sin B\cos A = 2R\sin^2 A - 2R\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \quad \sin A\cos B - \sin B\cos A = \sin^2 A - \sin^2 B$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = \frac{1 - \cos 2A}{2} - \frac{1 - \cos 2B}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A)$$

$$= \sin(A + B).\sin(A - B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B)[\sin(A + B) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} \sin(A-B)=0 & \text{suy ra} & A=B \\ \sin(A+B)=\sin C=1 & \text{suy ra} & C=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Do đó, tam giác ABC vuông hoặc cân tại C.

BÀI 10

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu S = p(p – c) trong đó S là diện tích, a, b, c là các cạnh, p là nửa chu vi tam giác.

Đại học Mỹ thuật Công nghiệp

GIẢI

Ta có: $S = p(p-c)$

suy ra: $S^2 = p^2(p-c)^2$ (1)

Theo công thức Hêrông ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow \qquad S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$p^2(p-c)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Leftrightarrow \quad p(p-c) = (p-a)(p-b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) = \left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 - c^2 = [c-(a-b)][c+(a-b)]$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = c^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

Do đó: $a^2 + b^2 = c^2$

Vậy ABC là tam giác vuông tại C (vì có bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh kia).

BÀI 11

Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thoả mãn $\mathrm{tgA.tgB} = \mathrm{cotg}^2\dfrac{C}{2}$ thì ABC là tam giác vuông hoặc cân

GIẢI

Ta có : $\mathrm{tgA.tgB} = \mathrm{cotg}^2\dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\cos^2\dfrac{C}{2}}{\sin^2\dfrac{C}{2}} = \frac{1+\cos C}{1-\cos C}$$

$\Leftrightarrow$ $\sin A \sin B\,(1-\cos C) = \cos A \cos B(1+\cos C)$

$\Leftrightarrow$ $\cos A\cos B - \sin A \sin B + \cos C\,(\cos A\cos B + \sin A \sin B) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos\,(A+B) + \cos C\,(\,\cos(A-B)) = 0$

$\Leftrightarrow$ $-\cos C + \cos C\,(\,\cos(A-B)) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos C\,[\cos(A-B)-1] = 0$

Từ đó suy ra , nếu $\cos C = 0$ thì $C = 90^0$, nếu $\cos(A-B) = 1$ thì $A = B$. Vậy tam giác ABC thoả mãn $\mathrm{tgA.tgB} = \mathrm{cotg}^2\dfrac{C}{2}$ thì tam giác ABC là vuông hoặc cân

BÀI 12

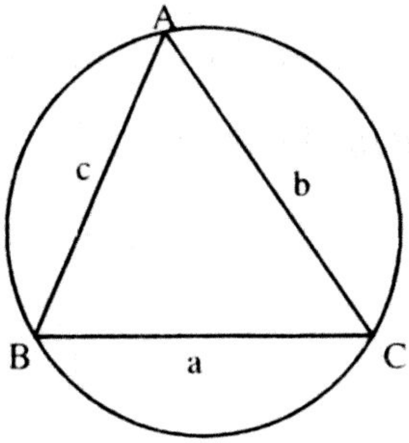
Cho tam giác ABC với BC = a ; CA = b ; AB = c. Chứng minh rằng tam giác ABC là vuông tại A hoặc cân tại A khi và chỉ khi:

$$\frac{b-c}{b+c} = \mathrm{tg}\,\frac{B-C}{2}$$

Đại học Sư phạm Quy Nhơn (1999, D)

GIẢI

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Theo định lý hàm số sin ta có:



a=2RsinA, b=2RsinB và c=2RsinC

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{b-c}{b+c} = \text{tg}\,\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2R(\sin B - \sin C)}{2R(\sin B + \sin C)} = \text{tg}\,\frac{B-C}{2}$$

$$\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \text{tg}\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{cot}\,\text{g}\,\frac{B+C}{2}\,\text{tg}\,\frac{B-C}{2} = \text{tg}\,\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\,\frac{B-C}{2}\left(1 - \text{cot}\,\text{g}\,\frac{B+C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \text{tg}\,\frac{B-C}{2} = 0 \\ 1 - \text{cot}\,\text{g}\,\frac{B+C}{2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \text{tg}\,\frac{B-C}{2} = \text{tg}0^0 \\ \text{cot}\,\text{g}\,\frac{B+C}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = C \\ \frac{B+C}{2} = 45^0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} B = C & \Leftrightarrow \Delta\text{ ABC cân tại A} \\ B + C = 90^0 & \Leftrightarrow \Delta\text{ ABC vuông tại A} \end{array}\right.$$

Vậy ΔABC là tam giác cân tại A hoặc là tam giác vuông tại A.

BÀI 13

Tam giác ABC có: $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B\sin C}$

(trong đó a, b, c là các cạnh; B, C là các góc của tam giác ABC)

Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông

Đại học Ngoại ngữ Hà Nội (2000)

GIẢI

Ta có:

$$\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B\sin C} \qquad (1)$$

Theo định lý hàm số sin ta có:

a = 2RsinA; b = 2RsinB; c = 2RsinC

Từ (1) suy ra: $\frac{2R\sin B}{\cos B} + \frac{2R\sin C}{\cos C} = \frac{2R\sin A}{\sin B\sin C}$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}B + \text{tg}C = \frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos B\cos C = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos B\cos C - \sin B\sin C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(B + C) = 0$$

suy ra $B + C = 90^0$ và $A = 90^0$

Do đó ABC là tam giác vuông tại A.

BÀI 14

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh đối diện với ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC thoả mãn: $\cot\text{g}\frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}$

Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

Đại học Công đoàn (2000)

Đại học Ngoại ngữ (2000)

GIẢI

Hệ thức: $\cot g\frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}$ với $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$

suy ra: $$\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \frac{B}{2} = \frac{A-C}{2} + 2k\pi \\ \frac{B}{2} = \frac{C-A}{2} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} B + C - A = 4k\pi \\ B + A - C = 4k\pi \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Tam giác ABC vuông tại A hoặc vuông tại C.

Bài 15

Tam giác ABC vuông tại A có BC = a, AB = c, AC = b. Chứng minh: $b^{2n} + c^{2n} \le a^{2n} \quad \forall n \in N$.

Học viện Quân y (2000)

GIẢI

Tam giác ABC vuông góc tại A $\Rightarrow$ a = BC là cạnh huyền nên $\frac{b}{a} < 1$;

$\frac{c}{a} < 1$. Khi đó:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{c}{a}\right)^{2n} \le \left(\frac{b}{a}\right)^{2} + \left(\frac{c}{a}\right)^{2} = 1$$

$\Rightarrow$ $b^{2n} + c^{2n} \le a^{2n}$ (đpcm).

Bài 16

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông hay cân khi và chỉ khi: $\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}^2\frac{C}{2} = 1$

Trung tâm Đào tạo Bồi dưỡng cán bộ Y tế TP.Hồ Chí Minh (2000)

GIẢI

Ta có: $\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}^2\frac{C}{2} = 1$ (1)

Biết: $$\text{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}} = \frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}$$

Do đó (1): $\Leftrightarrow \dfrac{\sin A \sin B(1 - \cos C)}{\cos A \cos B(1 + \cos C)} = 1$

$\Leftrightarrow$ $\sin A\sin B(1 - \cos C) = \cos A\cos B(1 + \cos C)$

$\Leftrightarrow$ $\sin A\sin B - \sin A\sin B\cos C = \cos A\cos B + \cos A\cos B\cos C$

$\cos A\cos B - \sin A\sin B + \cos C(\cos A\cos B + \sin A\sin B)$

$\cos(A + B) + \cos C\cos(A - B) = 0$

$\Leftrightarrow$ $-\cos C + \cos C\cos(A - B) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos C[\cos(A - B) - 1] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos C = 0\\ \cos(A - B) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}C = \frac{\pi}{2}\\ A = B\end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại C hoặc cân tại đỉnh C (đpcm).

BÀI 17

Cho tam giác ABC , chứng minh:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

Cao đẳng Hải quan (2000)

GIẢI

Ta cần chứng minh: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}\le 0 \qquad (1)$$

Biết $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})$

nên từ (1) ta có :

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}-4\sin^2\frac{C}{2}-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2-\cos^2\frac{A-B}{2}+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\sin^2\frac{A-B}{2}\ge 0 \qquad (2)$$

(2) luôn đúng.

Dấu “ = ” xảy ra khi $\sin\frac{A-B}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad A=B$

Bài 18

1. Cho B, C là hai góc nhọn của tam giác ABC có tính chất:

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 1$$

Chứng minh rằng khi đó tam giác ABC vuông tại A.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH = 1 và diện tích $S_{\Delta ABC} = 1$. Tính độ dài các cạnh của ΔABC .

Đại học Văn hoá (2000)

GIẢI

1. Ta có: $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2} = 1$$

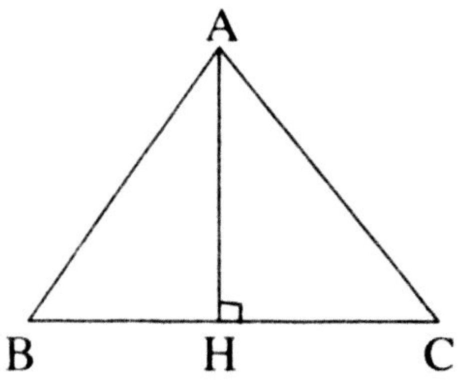
$$\Leftrightarrow \quad \cos(B+C)\cos(B-C) = 0$$

Vì B, C là góc nhọn nên $\cos(B - C) \neq 0$ nên chỉ có

$$\cos(B+C) = 0 \Rightarrow B + C = 90^0 \Rightarrow A = 90^0.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

2. Gọi cạnh huyền của tam giác BC = a



Diện tích $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.AH$

$$1 = \frac{1}{2}.a.1 \Rightarrow a = 2$$

Như vậy ABC là tam giác vuông có đường cao AH bằng nửa cạnh huyền, nên đường AH cũng là trung tuyến.

ABC là tam giác vuông cân có các cạnh: AB=AC $\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$2AB^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow \quad AB = \sqrt{2}$$

Các cạnh của tam giác vuông là AB = AC = $\sqrt{2}$ và BC = 2.

BÀI 19

Cho tam giác ABC có các góc A, B, C và các cạnh tương ứng a, b, c thoả mãn:

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{2a}}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Đại học Hồng Đức (2000, B)

GIẢI

Ta có : $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{2a}}$ (1)

Bình phương hai vế (1), ta được:

$$\sin^2\frac{B}{2} = \frac{a-c}{2a}$$

$$1-\cos B = 1-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos B = \frac{c}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad c = a\cos B \qquad (2)$$

Theo định lý hàm số sin ta có:

$$a = 2R\sin A \qquad (3)$$
$$c = 2R\sin C$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$\sin C = \sin A\cos B$$
$$= \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$\Rightarrow \qquad 2\sin C = \sin C + \sin(A-B)$$

$$\Rightarrow \qquad \sin C = \sin(A-B) \qquad (4)$$

Biết $\sin C = \sin(A+B)$ nên (4) $\Leftrightarrow$ $\sin(A+B) = \sin(A-B)$

$$\Rightarrow \qquad \sin A\cos B + \sin B\cos A = \sin A\cos B - \sin B\cos A$$

$$\Rightarrow \qquad \sin B\cos A = 0$$

Vì $\sin B \neq 0$ nên $\cos A = 0$ $\Leftrightarrow$ $A = 90^0$

Vậy tam giác ABC vuông tại A

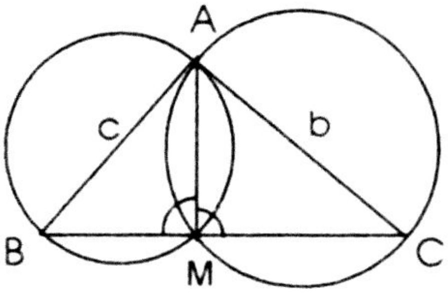
Bài 20

Cho ΔABC, điểm M chạy trên BC. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABM, ΔACM. Xác định vị trí của M sao cho $R_1 + R_2$ nhỏ nhất.

Đại học Ngoại thương TP. Hồ Chí Minh (2000, A)

GIẢI

Tìm M để $R_1 + R_2$ nhỏ nhất



Theo định lý hàm số sin trong Δ AMB và Δ AMC ta có:

$$\frac{c}{\sin\widehat{AMB}} = 2R_1$$

$$\frac{b}{\sin\widehat{AMC}} = 2R_2$$

$$\Rightarrow \quad 2(R_1 + R_2) = \frac{c}{\sin\widehat{AMB}} + \frac{b}{\sin\widehat{AMC}}$$

Biết $\widehat{AMB} = \pi - \widehat{AMC}$ nên $\sin\widehat{AMB} = \sin\widehat{AMC}$

nên $$R_1 + R_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b + c}{\sin\widehat{AMB}}\right)$$

b và c không đổi nên $R_1 + R_2$ nhỏ nhất khi $\sin\widehat{AMB}$ lớn nhất

$\Rightarrow \quad \sin\widehat{AMB} = 1 \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^0$

$\Rightarrow \quad AM \perp BC$

Do đó M là chân đường cao kẻ từ A đến cạnh BC.

Bài 21

Các góc của tam giác thoả mãn điều kiện:

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

Chứng minh rằng ΔABC là một tam giác vuông

Đại học Ngoại thương Hà Nội (D)

GIẢI

Chứng minh ΔABC là tam giác vuông nếu có các góc thoả mãn:

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$(1)\Leftrightarrow\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-1=0$$

$$\Leftrightarrow\quad\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)-\cos^2\frac{A}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad-\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)+\cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)=0$$

Với $\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}=0\Rightarrow\ tg\frac{A}{2}=1\Leftrightarrow\ \hat{A}=90^0$

Với $\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{A}{2}\ \Rightarrow\ B=90^0$ hoặc $C=90^0$ (đpcm)

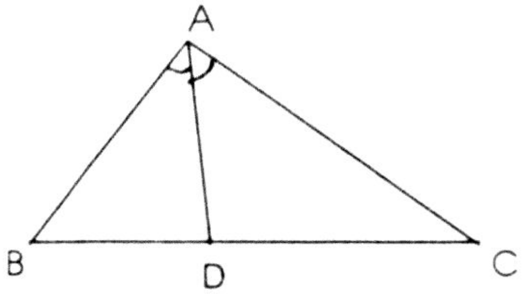
Bài 22

Cho tam giác ABC có AD là phân gác trong của góc A ($D\in BC$) và $\sin B\sin C\le\sin^2\frac{A}{2}$. Hãy chứng minh $AD^2\le BD.CD$

Đề thi Đại học của Bộ Quốc phòng năm 2002 (khối D)

GIẢI

Trong tam giác ABD theo định lý hàm số sin ta có:



$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{BD\sin B}{\sin\frac{A}{2}} \quad (1)$$

Trong tam giác ADC theo định lý hàm số sin ta cũng có:

$$\frac{AD}{\sin C} = \frac{CD}{\sin\frac{A}{2}} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{CD\sin C}{\sin\frac{A}{2}} \quad (2)$$

Nhân (1) và (2) từng vế một ta được :

$$AD^2 = \frac{BD.CD.\sin B\sin C}{\sin^2\frac{A}{2}} \quad (3)$$

Do $\sin B\sin C \le \sin^2\frac{A}{2}$ (đầu bài) nên từ (3) suy ra:

$$AD^2 \le BD.CD$$

Bài 23

A, B là các góc và a, b là các cạnh của tam giác ABC. Xác định dạng của tam giác ABC nếu có :

$$\mathbf{(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)}$$

Đại học Tài chính Kế toán (2000)

GIẢI

$$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin^2A+\sin^2B}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2A) - \frac{1}{2}(1-\cos 2B)}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(A-B)\left(\frac{1}{\sin C} - \frac{\sin C}{\sin^2 A + \sin^2 B}\right) = 0$$

- Với $\sin(A-B) = 0 \Rightarrow A = B$: Δ ABC cân đỉnh C

- Với $\dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{\sin C}{\sin^2 A + \sin^2 B} \quad \Rightarrow \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B$

$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2$: Δ ABC vuông tại C.

Bài 24

Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn hệ thức: $\cot gA.\cot gB = tg^2\dfrac{C}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân hoặc vuông. Đại học Thể dục Thể thao (2000)

GIẢI

Ta có: $\cot gA.\cot gB = tg^2\dfrac{C}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B} = \dfrac{1-\cos C}{1+\cos C}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A\cos B(1+\cos C) = \sin A\sin B(1-\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A\cos B - \sin A\sin B + \cos C(\cos A\cos B + \sin A\sin B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A+B) + \cos C.\cos(A-B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C[\cos(A-B) - 1] = 0$$

- Với $\cos C = 0 \Leftrightarrow C = \dfrac{\pi}{2}$

- Với $\cos(A-B) = 1 \Leftrightarrow A = B$

Vậy Δ ABC là tam giác vuông hoặc cân.

Bài 25

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu: $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \dfrac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}$

Đại học Thương mại (2000)

GIẢI

Ta có : $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \dfrac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a^2 - b^2\right)\sin(A + B) = \left(a^2 + b^2\right)\sin(A - B) \qquad (1)$$

Biến đổi vế trái: $\left(a^2 - b^2\right)\sin(A + B) = 4R^2\left(\sin^2 A - \sin^2 B\right)\sin(A + B)$

$$= 4R^2(\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)\sin(A + B)$$

$$= 16R^2 \cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin(A+B)$$

$$= 4R^2\sin^2(A+B)\sin(A-B) = c^2\sin(A-B) \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$c^2\sin(A - B) = \left(A^2 + b^2\right)\sin(A - B)$$

$$\sin(A - B)\left[C^2 - \left(a^2 + b^2\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin(A - B) = 0 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = B \\ C = 90^0 \end{array}\right.$$

Vậy Δ ABC là tam giác cân hoặc vuông.

Bài 26

Tính các góc của Δ ABC, biết chúng thoả mãn:

$$\mathbf{\sin(B\text{-}A)\sin C + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}}$$

Viện Đại học Mở Hà Nội (2000, A)

GIẢI

Ta có : $\sin(B\text{-}A)\sin C + \sin A + \cos B = \dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(B-A)\sin(B+A) + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 2A - \cos 2B) + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[1 - 2\sin^2 A - (2\cos^2 B - 1)\right] + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A + \cos^2 B - \sin A - \cos B + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sin A - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos B - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin A = \dfrac{1}{2} \\ \cos B = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = 30^0 \\ B = 60^0 \\ C = 90^0 \end{array}\right.$$

Vậy Δ ABC là tam giác vuông tại C.

Bài 27

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 \Leftrightarrow \text{ABC là tam giác vuông.}$$

Cao đẳng Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh (2000)

GIẢI

Ta có: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ (1)

Tính vế trái của (1):

$$\begin{aligned} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C \\ &= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C \\ &= 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos C] \\ &= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 1 - 2\cos A\cos B\cos C \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$1 - 2\cos A\cos B\cos C = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A\cos B\cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = 90^0 \\ C = 90^0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ vuông}$$

Bài 28

Tam giác ABC là tam giác gì nếu:

$$\begin{cases} \mathbf{a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4ab\cos A\sin B} \\ \mathbf{\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B} \end{cases}$$

Đại học Kiến trúc Hà Nội (2001)

GIẢI

$$\begin{cases} a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 4ab\cos A\sin B \\ \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A\sin B \end{cases} \qquad (1)$$

Thay a = 2RsinA, b = 2RsinB và c = 2RsinC vào (1) ta được:

$$\sin^2A\,\sin 2B + \sin^2B\,\sin 2A = 4\sin A\sin B\,\cos A\sin B$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2A\sin B\cos B + 2\sin^2B\sin A\cos A = 4\sin A\sin B\,\cos A\sin B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A\cos B + \sin B\cos A = 2\cos A\,\sin B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A + B) = \sin(A+B) + \sin(B-A)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(B-A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

Khi A = B thì sin2A + sin2B = 4sinAsinB trở thành

$$2\sin 2A = 4\sin^2A$$

hay

$$4\sin A\cos A = 4\sin^2A$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{\pi}{4}$$

Do đó ta có $A = B = \frac{\pi}{4}$ và $C = \frac{\pi}{2}$

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông cân đỉnh C.

Bài 29

Cho biết ba góc của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:

$$\mathbf{\cot gB + \cot gC = \frac{\sin A}{\cos B\cos C}}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

Đại học Cần Thơ (2001, D)

GIẢI

Ta có: $$\text{cotgB} + \text{cotgC} = \frac{\text{sinA}}{\text{cosBcosC}} \qquad (1)$$

Biết $\text{cotgB} + \text{cotgC} = \dfrac{\sin(B+C)}{\text{sinBsinC}}$ và $\sin(B+C) = \text{sinA}$ nên từ (1)

ta có: $$\frac{\text{sinA}}{\text{sinBsinC}} = \frac{\text{sinA}}{\text{cosBcossC}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{sinBsinC} = \text{cosBcosC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{cosBcosC} - \text{sinBsinC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(B+C) = 0 = \cos 90^0$$

$$\Rightarrow \quad B + C = 90^0 \ , \quad A = 90^0$$

Vậy ΔABC là tam giác vuông đỉnh A.

Bài 30

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông hay cân khi và chỉ khi: $\text{tgAtgBtg}^2\dfrac{C}{2} = 1$

Trung tâm Đào tạo Bồi dưỡng cán bộ Y tế TP. Hồ chí Minh (2000)

GIẢI

Ta có: $$\text{tgAtgBtg}^2\frac{C}{2} = 1 \qquad (1)$$

Biết $$\text{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}} = \frac{1-\text{cosC}}{1+\text{cosC}}$$

Do đó từ (1) ta có:

$$\frac{\text{sinAsinB}(1-\text{cosC})}{\text{cosAcosB}(1+\text{cosC})} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{sinAsinB}\ (1-\text{cosC}) = \text{cosAcosB}\ (1+\text{cosC})$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{sinAsinB} - \text{sinA sinB cosC} = \text{cosAcosB} + \text{cosAcosB cosC}$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\text{cosAcosB} - \text{sinA sinB}) = \text{cosC}\ (\text{cosAcosB} + \text{sinA sinB})$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos(A+B) = \text{cosCcos}(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{cosC} = \text{cosCcos}(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{cosC}\ [(1-\cos(A-B))] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \text{cosC} = 0 \\ \cos(A-B) = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C = \dfrac{\pi}{2} \\ A = B \end{array}\right.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại C hoặc cân tại đỉnh C (đpcm)

IV. TAM GIÁC ĐỀU :

BÀI 1

Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu 3 cạnh a, b, c và bán kính đường tròn nội tiếp thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2$.

Đại học Xây dựng Hà Nội (1994)

GIẢI

Trong tam giác, ta có:

$$a^2 + b^2 \ge 2ab$$

$$b^2 + c^2 \ge 2bc$$

$$a^2 + c^2 \ge 2ac$$

suy ra:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac \qquad (1)$$

Biết S = pr nên $r = \dfrac{S}{p}$, do đó:

$$36r^2 = 36.\ \frac{S^2}{p^2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 36\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}$$

$$= \frac{72}{2p}(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$= \frac{9.8}{a+b+c}\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)} \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$2\sqrt{p-a}.\sqrt{p-b} \le (p-a) + (p-b) = 2p - a - b = c \qquad (3)$$

$$2\sqrt{p-b}.\sqrt{p-c} \le (p-b) + (p-c) = 2p - b - c = a \qquad (4)$$

$$2\sqrt{p-c}.\sqrt{p-a} \le (p-c) + (p-a) = 2p - c - a = b \qquad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta suy ra:

$$8\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)} \le abc$$

Do đó, từ (1) và (2) ta có:

$$ab + bc + ac \le a^2 + b^2 + c^2 \le \frac{9abc}{a + b + c}$$

$$\Leftrightarrow \quad (ab + bc + ac)(a + b + c) \le 9abc$$

$$\Leftrightarrow \quad a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \le 0$$

Do đó: $a = b = c \Rightarrow$ tam giác ABC đều

BÀI 2

1. Giải phương trình:

$$\cos^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

2. Tam giác ABC có diện tích bằng 1 và ba cạnh a, b, c thoả mãn $36 = \sqrt{3}\,(a + b + c)^2$. Hãy xác định dạng của tam giác đó.

Đại học Luật TP. Hồ Chí Minh. (1995)

GIẢI

1. Ta có: $\cos^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 + 2(\cos 2x + \sin 2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x + \sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Các nghiệm số là: $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ và $\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

2. Hệ thức đã cho: $36 = \sqrt{3}\,(a + b + c)^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si với ba số dương $(p - a), (p - b), (p - c)$ ta có:

$$(p - a)(p - b)(p - c) \le \left[\frac{(p - a) + (p - b) + (p - c)}{3}\right]^3 = \frac{p^3}{27}$$

$$\Leftrightarrow \quad p(p - a)(p - b)(p - c) \le \frac{p^4}{27}$$

$$\Leftrightarrow \quad S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{a + b + c}{2}\right)^2}{3\sqrt{3}}$$

Do $S = 1$ nên ta có:

$$1 \le \frac{(a + b + c)^2}{12\sqrt{3}} = \frac{(a + b + c)^2}{36}.\sqrt{3}$$

Suy ra: $36 \le \sqrt{3}\,(a + b + c)^2$

Dấu "=" xảy ra khi $(p - a) = (p - b) = (p - c) \Leftrightarrow a = b = c$ $\Leftrightarrow$ABC là tam giác đều.

BÀI 3

Chứng minh rằng tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60^0 khi và chỉ khi:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$$

Đại học Nông lâm TP. Hồ Chí Minh (1995)

GIẢI

Ta có: $$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (\sin A-\sqrt{3}\cos A)+(\sin B-\sqrt{3}\cos B)+(\sin C-\sqrt{3}\cos C)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)+\left(\frac{1}{2}\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)+\left(\frac{1}{2}\sin C-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-60^0)+\sin(B-60^0)+\sin(C-60^0)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A+B}{2}-60^0\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\left(\frac{C}{2}-30^0\right)\cos\left(\frac{C}{2}-30^0\right)=0 \quad (1)$$

Biết $$\frac{A+B}{2}-60^0=\left(90^0-\frac{C}{2}\right)-60^0=30^0-\frac{C}{2}$$

nên $$\sin\left(\frac{A+B}{2}-60^0\right)=\sin\left(30^0-\frac{C}{2}\right)=-\sin\left(\frac{C}{2}-30^0\right)$$

Do đó (1) có thể viết:

$$-2\sin\left(\frac{C}{2}-30^0\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\left(\frac{C}{2}-30^0\right)\cos\left(\frac{C}{2}-30^0\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{C}{2}-30^0\right)\left[\cos\left(\frac{C}{2}-30^0\right)-\cos\frac{A-B}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{C}{2}-30^0\right)\left[\cos\left(60^0-\frac{A+B}{2}\right)-\cos\frac{A-B}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{C}{2}-30^0\right)\left[-2\sin\left(30^0-\frac{A}{2}\right)\sin\left(30^0-\frac{B}{2}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{A}{2}-30^0\right).\sin\left(\frac{B}{2}-30^0\right).\sin\left(\frac{C}{2}-30^0\right)=0 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra: $\sin\left(\frac{A}{2}-30^0\right)=0$ hoặc $\sin\left(\frac{B}{2}-30^0\right)=0$ hoặc

$$\sin\left(\frac{C}{2}-30^0\right)=0$$

Giả sử $\sin\left(\frac{A}{2}-30^0\right)=0$

Biết $0^0<\frac{A}{2}<90^0 \quad \Rightarrow -30^0<\frac{A}{2}-30^0<60^0$

nên $\sin\left(\frac{A}{2}-30^0\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{A}{2}-30^0=0^0$

$$\Leftrightarrow A=60^0$$

BÀI 4

> **Các góc tam giác ABC thoả mãn điều kiện:**
>
> $$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}=\sqrt{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$
>
> **Chứng minh rằng ΔABC đều.**
>
> **Đại học Ngoại thương Hà Nội (1995)**

GIẢI

Hệ thức đã cho:

$$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}=\sqrt{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

Do $\frac{A}{2}<90^0$, $\frac{B}{2}<90^0$ và $\frac{C}{2}<90^0$ nên biểu thức dưới căn ở vế phải có giá trị dương.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$\left(\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}\right)^2\le 2(\sin A+\sin B)$$

$$=2.2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 4\cos\frac{C}{2}$$

(Vì $\cos\frac{A-B}{2} \le 1$ và $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$)

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} \sin A = \sin B \\ \cos\frac{A-B}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B$

Vậy:

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \le 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}} \qquad (1)$$

$$\sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \le 2\sqrt{\cos\frac{A}{2}} \qquad (2)$$

$$\sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin A} \le 2\sqrt{\cos\frac{B}{2}} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế ta có:

$$2\left(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C}\right) \le 2\left(\sqrt{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \le \sqrt{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A = B = C hay ABC là tam giác đều.

BÀI 5

Các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$\sqrt{\mathrm{tg}A} + \sqrt{\mathrm{tg}B} + \sqrt{\mathrm{tg}C} = \sqrt{\mathrm{cotg}\frac{A}{2}} + \sqrt{\mathrm{cotg}\frac{B}{2}} + \sqrt{\mathrm{cotg}\frac{C}{2}}$$

Chứng minh rằng ΔABC đều.

Đại học Ngoại thương TP.Hồ Chí Minh (1995)

GIẢI

Ta có:

$$\sqrt{\text{tg}A} + \sqrt{\text{tg}B} + \sqrt{\text{tg}C} = \sqrt{\text{cot g}\frac{A}{2}} + \sqrt{\text{cot g}\frac{B}{2}} + \sqrt{\text{cot g}\frac{C}{2}} \qquad (1)$$

Để (1) có nghĩa thì các góc A, B, C của tam giác ABC phải là góc nhọn. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng:

$$A \le B \le C \;\Rightarrow\; \begin{cases} A \le \dfrac{\pi}{3} \\ C \ge \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Do hàm số tgx đồng biến trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên:

$$\sqrt{\text{tg}A} + \sqrt{\text{tg}B} + \sqrt{\text{tg}C} \le 3\sqrt{\text{tg}C} \ge 3\sqrt{\text{tg}\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt[4]{3} \qquad (2)$$

Và hàm số cotgx nghịch biến trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên

$$\sqrt{\text{cot g}\frac{A}{2}} + \sqrt{\text{cot g}\frac{B}{2}} + \sqrt{\text{cot g}\frac{C}{2}} \ge 3\text{cot g}\sqrt{\frac{C}{2}} = 3\sqrt{\text{cot g}\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt[4]{3} \qquad (3)$$

Ở (2) dấu "đẳng thức" xảy ra khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$

Ở (3) dấu "đẳng thức" xảy ra khi $\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} = \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \; A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

Vậy nếu tam giác ABC đều thì hệ thức (1) được thoả mãn.

Cách khác. Biểu thức dưới cặn cho ta tgA, tgB, tgC > 0 và A, B, C là các góc nhọn nên cosC > 0.

Ta có: $\dfrac{1+\cos C}{1-\cos C} \le \dfrac{\cos(A-B)+\cos C}{\cos(A-B)-\cos C} = \dfrac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{\cos(A-B)+\cos(A+B)}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\cos^2\dfrac{C}{2}}{2\sin^2\dfrac{C}{2}} \le \frac{-2\sin A\sin(-B)}{2\cos A\cos(-B)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot g^2\frac{C}{2} \le \frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B} = \text{tgAtgB}$$

suy ra: $\sqrt{\cot g\dfrac{C}{2}} \le \sqrt[4]{\text{tgAtgB}}$ (4)

Tương tự ta có:

$$\sqrt{\cot g\frac{A}{2}} \le \sqrt[4]{\text{tgBtgC}} \qquad (5)$$

$$\sqrt{\cot g\frac{B}{2}} \le \sqrt[4]{\text{tgAtgC}} \qquad (6)$$

Cộng (4), (5) và (6) vế với vế (đều dương) ta được:

$$\sqrt{\cot g\frac{A}{2}} + \sqrt{\cot g\frac{B}{2}} + \sqrt{\cot g\frac{C}{2}} \le \sqrt[4]{\text{tgBtgC}} + \sqrt[4]{\text{tgAtgC}} + \sqrt[4]{\text{tgAtgB}} \qquad (7)$$

Nhưng theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{\text{tgBtgC}} \le \dfrac{\sqrt{\text{tgB}}+\sqrt{\text{tgC}}}{2} \\ \sqrt[4]{\text{tgAtgC}} \le \dfrac{\sqrt{\text{tgA}}+\sqrt{\text{tgC}}}{2} \\ \sqrt[4]{\text{tgAtgB}} \le \dfrac{\sqrt{\text{tgA}}+\sqrt{\text{tgB}}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{\text{tgBtgC}} + \sqrt[4]{\text{tgAtgC}} + \sqrt[4]{\text{tgAtgB}} \le \sqrt{\text{tgA}} + \sqrt{\text{tgB}} + \sqrt{\text{tgC}} \qquad (8)$$

Từ (8) và (7) ta suy ra:

$$\sqrt{\cot g\frac{A}{2}}+\sqrt{\cot g\frac{B}{2}}+\sqrt{\cot g\frac{C}{2}}\le\sqrt{tgA}+\sqrt{tgB}+\sqrt{tgC}$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

BÀI 6

Cho tam giác ABC có các cạnh BC = a; AC = b ; AB = c. Gọi m_b, m_c lần lượt là độ dài các trung tuyến BM, CN.

1) Biết $\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c}\neq 1$. Chứng minh 2cotgA = cotgB + cotgC.

2) Biết $\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c}$ và $A = 60^0$. Chứng minh ΔABC là đều.

Đại học Quốc gia TP.Hồ Chí Minh (1995)

GIẢI

Ta có: $\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c}$ suy ra $\frac{c^2}{b^2}=\frac{m_b^2}{m_c^2}$ (1)

Biết $m_b^2=\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{2}$ và $m_c^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{2}$

Do đó (1) trở thành:

$$\frac{c^2}{b^2}=\frac{m_b^2}{m_c^2}=\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{2(a^2+b^2)-c^2}$$

suy ra: $c^2[2(a^2+b^2)-c^2]=b^2[2(a^2+c^2)-b^2]$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2=b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2=b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2A=2\sin B\sin C\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin A}{\sin B\sin C}=2\frac{\cos A}{\sin A}=2\cot gA$$

Biết sinA = sin(B + C) nên:

$$\frac{\sin A}{\sin B\sin C}=\frac{\sin B\cos C+\sin C\cos B}{\sin B\sin C}=\cot gB+\cot gC$$

Do đó: $\quad 2\text{cotg}A = \text{cotg}B + \text{cotg}C$

2) Theo câu trên ta có: $\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c}$ thì:

$$2\text{cotg}A = \text{cotg}B + \text{cotg}C$$

Biết $A = 60^0$ nên $2\text{cotg}A = 2\text{cotg}60^0 = \text{cotg}B + \text{cotg}C$

$$2\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$2\sqrt{3}\sin B\sin C = 3\sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$4\sin B\sin C = 3$$

$$\Rightarrow \quad 2[\cos(B-C)-\cos(B+C)] = 3$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos(B-C) - 2\cos 120^0 = 3$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos(B-C) = 3 + 2\cos 120^0 = 3 - 1 = 2$$

Hay $\cos(B-C) = 1$

$$\Rightarrow \quad B - C = 0$$

$\Rightarrow \quad B = C$ suy ra $B = C = 60^0$.

Vậy ΔABC là tam giác đều.

BÀI 7

Các góc B, C của tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$2\left(\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\sqrt{3}\right)\le \cot gB+\cot gC$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Đại học Xây dựng Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $2\left(\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}-\sqrt{3}\right)\le \cot gB+\cot gC$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{\sin C+\sin B-\sqrt{3}\sin B\sin C}{\sin B\sin C}\right)\le \frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\sin B+\sin C-\sqrt{3}\sin B\sin C)\le \sin C\cos B+\sin B\cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin B[2-(\sqrt{3}\sin C+\cos C)]+\sin C[2-(\sqrt{3}\sin B+\cos B)]\quad \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin B\left[2-\left(\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\sin C+\cos C\right)\right]+\sin C\left[2-\left(\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\sin B+\cos B\right)\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin B\left[2-2\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\right]+\sin C\left[2-2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin B\left[1-\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\right]+2\sin C\left[1-\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\right]\le 0 \qquad (1)$$

Biết $\sin B>0$ và $1-\sin\left(C+\dfrac{\pi}{6}\right)\ge 0$

$\sin C>0$ và $1-\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\ge 0$

từ (1) ta suy ra:

$$\begin{cases}1-\sin\left(C+\dfrac{\pi}{6}\right)=0\\ 1-\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}C+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}\\ B+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow B=C=\frac{\pi}{3}$$

Vậy ABC là tam giác đều.

BÀI 8

Tam giác ABC có tính chất gì nếu:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

trong đó A, B, C là các góc của tam giác; a, b, c là các cạnh của tam giác.

Đại học Dân lập Phương Đông (1996)

GIẢI

Ta biến đổi vế trái:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \cos A + \cos B - \cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2} + 1$$

$$= -2\left(\cos^2\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} + 1$$

$$= -2\left(\cos\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Vế phải:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3$$

$$= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} - 3$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$(a+b) + (b+c) + (c+a) \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a+b}\right)\left(\frac{1}{b+c}\right)\left(\frac{1}{c+a}\right)} \qquad (3)$$

Nhân (1) và (2) vế với vế ta được:

$$\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9$$

Do đó: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}.9 - 3 = \dfrac{3}{2}$ **(4)**

Dấu bằng ở (1) xảy ra khi $a + b = b + c = c + a \Leftrightarrow a = b = c$

Dấu bằng ở (4) xảy ra khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$

Vậy tam giác có $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$

là tam giác giác đều.

BÀI 9

Các góc A, B, C của tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Đại học Xây dựng (1996)

GIẢI

Ta có: $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \leq 2\cos\dfrac{A+B}{2} = 2\sin\dfrac{C}{2}$ **(1)**

Dấu "=" xảy ra khi $\cos\dfrac{A-B}{2} = 1$ hay $A = B$.

Tương tự $\cos B + \cos C \le 2\sin\frac{A}{2}$, dấu "=" xảy ra khi B = C (2)

$\cos C + \cos A \le 2\sin\frac{B}{2}$, dấu "=" xảy ra khi C = A (3)

Cộng (1), (2) và (3) ta suy ra:

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C nên ABC là tam giác đều.

BÀI 10

Giả sử A, B, C là ba góc của tam giác ABC thoả mãn:

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) = 27$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Cao đẳng Hải quan (1996)

GIẢI

Ta có: $\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) = 27$

Khai triển vế trái, ta được:

$$1+\underbrace{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}}+\underbrace{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\ge 1+3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\right)^3 \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}\right)^3 = 27$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

hay: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{8} \leq 0$

$$\frac{1}{2}[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}]\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{8} \leq 0$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{8} \leq 0$$

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + \frac{1}{8} \geq 0 \qquad (1)$$

(1) luôn đúng vì tam thức này có $\Delta \leq 0$. Dấu "=" khi A = B.

Cũng có thể viết (1) thành:

$$4\sin^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2} + \sin^2\frac{A-B}{2} \geq 0$$

$$\left[2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right]^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \geq 0 \qquad (2)$$

(2) luôn đúng, dấu "=" xảy ra khi $\sin\frac{A-B}{2} = 0 \Leftrightarrow A = B$

$$2\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} = \cos 0^0 = 1;\ \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 60^0$$

$\Rightarrow \Delta$ ABC đều

BÀI 11

Gọi A, B, C là ba góc tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là ta có hệ thức:

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\cos B}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\cos C}=\sqrt{3}$$

Đại học Bách khoa Hà Nội (1996)

GIẢI

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\cos B}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\cos C}=\sqrt{3} \qquad (1)$$

* Điều kiện cần: tam giác ABC đều thì $A = B = C = 60^0$

Vế trái khi đó là:

$$\frac{\cos 30^0}{1+\cos 60^0}+\frac{\cos 30^0}{1+\cos 60^0}+\frac{\cos 30^0}{1+\cos 60^0}=\sqrt{3}=\text{vế phải}$$

* Điều kiện đủ: Từ (1) ta suy ra:

$$\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{2\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{2\cos\frac{C}{2}}=\sqrt{3}$$

Ta có:

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos(A+B)$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\left[2\cos^2\frac{A+B}{2}-1\right]$$

$$=-2\left[\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right]+1$$

$$=-2\left[\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right]+1$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} - 2\left(\cos\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 \le \frac{3}{2} \qquad (2)$$

và

$$\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)^2 \le 3\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right),$$

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \sqrt{3}\sqrt{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}}$$

$$= \sqrt{3}\sqrt{\frac{1+\cos A}{2} + \frac{1+\cos B}{2} + \frac{1+\cos C}{2}}$$

$$\le \sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \ge 3\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}}$$

suy ra $\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right) \ge 9 \qquad (3)$

Từ (2) và (3) ta có:

$$9 \le \left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right) \le \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \geq \frac{9.2}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi ABC là tam giác đều.

BÀI 12

Chứng minh ràng nếu các góc của tam giác ABC thoả mãn $\mathrm{tg}^6\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^6\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^6\frac{C}{2}=\frac{1}{9}$ thì ABC là tam giác đều.

Đại học Giao thông (1996)

GIẢI

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki:

$$(ab+bc+ca)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2) = (a^2+b^2+c^2)^2$$

ta suy ra: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

Với $a=\mathrm{tg}^3\frac{A}{3}$, $b=\mathrm{tg}^3\frac{B}{3}$ và $c=\mathrm{tg}^3\frac{C}{3}$ ta có:

$$\mathrm{tg}^6\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^6\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^6\frac{C}{2} \geq \left(\mathrm{tg}^3\frac{A}{2}\mathrm{tg}^3\frac{B}{2}\right)+\left(\mathrm{tg}^3\frac{B}{2}\mathrm{tg}^3\frac{C}{2}\right)+\left(\mathrm{tg}^3\frac{C}{2}\mathrm{tg}^3\frac{A}{2}\right)$$

$$=\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}\right)^3+\left(\mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2}\right)^3+\left(\mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}\right)^3 \quad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi : $\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\mathrm{tg}\frac{B}{2}=\mathrm{tg}\frac{C}{2}$. Ta cần chứng minh vế phải của (1) $\geq \frac{1}{9}$

Ta có: $$\mathrm{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\mathrm{tg}\frac{A}{2}+\mathrm{tg}\frac{B}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}}=\cot g\frac{C}{2}=\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$$

Do đó:

$$1=\left(1\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+1\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+1\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^2\le 3\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)$$

Bình phương hai vế rồi rút gọn ta được:

$$\frac{1}{9}\ \le\ \left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{9}\le\left(\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\sqrt{\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^3}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\sqrt{\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^3}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\sqrt{\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^3}\right)^2$$

$$\le\ \left[\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^3+\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^3+\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^3\right]$$

Dấu " = " xảy ra khi:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^3=\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^3=\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^3=\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\ \Leftrightarrow\ \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$\Rightarrow$ $\Delta\,ABC$ là tam giác đều.

Bài 13

Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC và p là nửa chu vi của tam giác đó.Chứng minh rằng nếu 8(p-a)(p-b)(p-c)= abc thì ABC là tam giác đều. **Đai học Kinh tế Quốc dân (1996)**

GIẢI

Ta có: $8(p-a)\,(p-b)\,(p-c) = abc$

$\Leftrightarrow \quad (2p - 2a)\,(2p - 2b)\,(2p - 2c) = abc$

$\Leftrightarrow \quad (a + b + c - 2a)(a + b + c - 2b)(a + b + c - 2c) = abc$

$\Leftrightarrow \quad (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) = abc$

Ta có: $a^2 \geq a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a + c - b) \qquad (1)$

$b^2 \geq b^2 - (a - c)^2 = (a + b - c)(b + c - a) \qquad (2)$

$c^2 \geq c^2 - (a - b)^2 = (c + a - b)(b + c - a) \qquad (3)$

Dấu " = " xảy ra khi vẫ chỉ khi a = b = c

Nhân (1), (2), (3) vế với vế ta được:

$$(abc)^2 \geq (b + c - a)^2 (a + c - b)^2 (a + b - c)^2$$

$$\Rightarrow \quad abc \geq (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$$

Dấu " = " xảy ra khi b = c, a = c, a = b dẩn tới a = b = c

$\Rightarrow$ ABC là tam giác đều.

Cách khác: Biết $p - a = \dfrac{b + c - a}{2} > 0$

$$p - b = \frac{a + c - b}{2} > 0$$

$$p - c = \frac{a + b - c}{2} > 0$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{(p - a)(p - b)} \leq \frac{p - a + p - b}{2} = \frac{c}{2} \qquad (4)$$

$$\sqrt{(p - b)(p - c)} \leq \frac{p - b + p - c}{2} = \frac{a}{2} \qquad (5)$$

$$\sqrt{(p - c)(p - a)} \leq \frac{p - c + p - a}{2} = \frac{b}{2} \qquad (6)$$

Hai vế của bất đẳng thức đều dương, nhân (4),(5), và (6) vê với vế

ta có: $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \dfrac{1}{8} abc$ hay $8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $p - a = p - b = p - c$ suy ra $a = b = c$ và ABC là tam giác đều.

Chú ý: $p - a = \dfrac{a+b+c}{2} - a = \dfrac{a+b+c-2a}{2} = \dfrac{b+c-a}{2}$

$p - b = \dfrac{a+b+c}{2} - b = \dfrac{a+b+c-2b}{2} = \dfrac{a+c-b}{2}$

$2p$ là chu vi tam giác, $2p = a + b + c$.

BÀI 14

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

$$\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$$

thì ABC là tam giác đều

GIẢI

Ta có: $\sin A\sin B = \dfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)] \le \dfrac{1 + \cos C}{2}$

$$\Rightarrow \qquad \sin A\sin B \le \cos^2\frac{C}{2}$$

Tương tự: $\sin B\sin C \le \cos^2\dfrac{A}{2}$

$$\sin A\sin C \le \cos^2\frac{B}{2}$$

Do đó: $\sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A = \cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2}$

Dấu "=" xẩy ra $A = B = C \Rightarrow \Delta$ ABC là đều.

BÀI 15

Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC có:

$$bc\sqrt{3} = R[2(b + c) - a]$$

(trong đó a, b, c là các cạnh, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác) thì ABC là tam giác đều.

Đại học Thương mại (1997)

GIẢI

Ta có: $bc\sqrt{3} = R[2(b + c) - a]$ (1)

Áp dụng định lý hàm số sin, ta suy ra a=2RsinA, b=2RsinB, c = 2RsinC, từ (1) ta có:

$$\sqrt{3}\,(2R\sin B).(2R\sin C) = R[2(2R\sin B + 2R\sin C) - 2R\sin A]$$

$$\Leftrightarrow 2.\sqrt{3}\sin B\sin C = 2(\sin B + \sin C) - \sin A$$

$$= 2\sin B + 2\sin C - \sin(B + C)$$

$$= 2\sin B + 2\sin C - [\sin B\cos C + \sin C\cos B]$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B\left[1 - \left(\frac{1}{2}\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)\right] + 2\sin C\left[1 - \left(\frac{1}{2}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B[1 - (\sin 30^0\cos C + \sin C\cos 30^0)] +$$

$$+ 2\sin C[1 - (\sin 30^0\cos B + \sin B\cos 30^0] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B[1 - \sin(C + 30^0)] + 2\sin C[1 - \sin(B + 30^0)] = 0$$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi:

$$\begin{cases} \sin(C + 30^0) = 1 \quad \text{suy ra} \quad C = 60^0 \\ \sin(B + 30^0) = 1 \quad \text{suy ra} \quad B = 60^0 \end{cases}$$

Vậy ABC là tam giác đều.

BÀI 16

Chứng minh rằng để ABC là tam giác đều thì điều kiện cần và đủ là:

$$\frac{1}{\cot gA + \cot gB} + \frac{1}{\cot gB + \cot gC} + \frac{1}{\cot gC + \cot gA} = \sin A + \sin B + \sin C$$

Đại học Sư phạm Hà Nội 2 (1997)

GIẢI

Ta có: $$\text{cotg}A + \text{cotg}B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B} = \frac{\sin C}{\sin A\sin B}$$

$$\text{cotg}B + \text{cotg}C = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\text{cotg}C + \text{cotg}A = \frac{\sin(C+A)}{\sin C\sin A} = \frac{\sin B}{\sin C\sin A}$$

Do đó:

$$\frac{1}{\text{cotg}A+\text{cotg}B} + \frac{1}{\text{cotg}B+\text{cotg}C} + \frac{1}{\text{cotg}C+\text{cotg}A} = \sin A+\sin B+\sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}} + \frac{1}{\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}} + \frac{1}{\dfrac{\sin B}{\sin C\sin A}} = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A\sin B}{\sin C} + \frac{\sin B\sin C}{\sin A} + \frac{\sin C\sin A}{\sin B} = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 A\sin^2 B+\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 A}{\sin A\sin B\sin C} = \sin A+\sin B+\sin C \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C \geq 2\sin^2 B\sin A\sin C \quad (2)$$

$$\sin^2 B\sin^2 C + \sin^2 C\sin^2 A \geq 2\sin^2 C\sin A\sin B \quad (3)$$

$$\sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 C\sin^2 A \geq 2\sin^2 A\sin B\sin C \quad (4)$$

Cộng vế với vế (2), (3) và (4), ta được:

$$2(\sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C + \sin^2 C\sin^2 A)$$

$$\geq 2\sin A\sin B\sin C(\sin A + \sin B + \sin C)$$

hay:

$$\sin^2 A\sin^2 B+\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 A \geq \sin A\sin B\sin C(\sin A+\sin B+\sin C) \quad (5)$$

Từ (1) và (5) suy ra:

Dấu "=" xảy ra khi sinA = sinB = sinC $\Rightarrow$ ABC là tam giác đều.

BÀI 17

Tam giác ABC có: $\begin{cases} \cos B\cos C = \dfrac{1}{4} \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Đại học Ngoại ngữ Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có: $a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c}$

Suy ra: $a^3 - a^2b - a^2c = a^3 - b^3 - c^3$

$\Leftrightarrow \quad a^2(b + c) = b^3 + c^3 = (b + c)(b^2 + c^2 - bc)$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - bc \qquad (1)$$

Theo định lý hàm số cosin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 60^0$$

Ta lại có $\quad \cos B\cos C = \dfrac{1}{2}[\cos(B + C) + \cos(B - C)] = \dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(B + C) + \cos(B - C) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos A + \cos(B - C) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} + \cos(B - C) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(B - C) = 1 = \cos 0^0$$

$$\Leftrightarrow \qquad B - C = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad B = C$$

Trong tam giác ABC có $B = C$ và $A = 60^0$ nên là tam giác đều.

BÀI 18

Các cạnh của tam giác ABC thoả mãn hệ thức:

$$\frac{abc}{ab + bc + ac} = \frac{2}{9}p \quad \text{(p là nửa chu vi)}$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Cao đẳng Sư phạm Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có: $\dfrac{abc}{ab + bc + ac} = \dfrac{2}{9}p = \dfrac{a + b + c}{9}$

$$\Leftrightarrow \quad (ab + bc + ac)(a + b + c) = 9abc \qquad (1)$$

Với 3 số ab, bc, ac, theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$ab + bc + ac \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \qquad (2)$$

Với 3 số a, b, c ta cũng có:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \qquad (3)$$

Nhân (2) và (3) ta có:

$$(ab + bc + ac)(a + b + c) \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\,.3\sqrt[3]{abc} = 9abc \qquad (4)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $ab = bc = ac$ và $a = b = c$ nên tam giác ABC là tam giác đều.

BÀI 19

Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu các góc A, B, C thoả mãn:

$$\sin^6\frac{A}{2} + \sin^6\frac{B}{2} + \sin^6\frac{C}{2} = \frac{3}{64}$$

Viện Đại học Mở (1997, A)

GIẢI

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số $\sin^6\frac{A}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^6$, $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ ta có:

$$\sin^6\frac{A}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^6 \geq 3\sqrt[3]{\sin^6\frac{A}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6}=\frac{3}{16}\sin^2\frac{A}{2} \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\sin^6\frac{B}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^6 \geq 3\sqrt[3]{\sin^6\frac{B}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6}=\frac{3}{16}\sin^2\frac{B}{2} \quad (2)$$

$$\sin^6\frac{C}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\left(\frac{1}{2}\right)^6 \geq 3\sqrt[3]{\sin^6\frac{C}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6}=\frac{3}{16}\sin^2\frac{C}{2} \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế ta có:

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}+\frac{6}{64}\geq\frac{3}{16}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right) \quad (4)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sin^6\frac{A}{2}=\sin^6\frac{B}{2}=\sin^6\frac{C}{2}$ tức: $A=B=C$ và ABC là tam giác đều.

Ta tính: $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$

Đặt : $T=\cos A+\cos B+\cos C$

Ta có:

$$T+\cos\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\leq 2\left[\cos\frac{A+B}{2}+\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$(\text{vì } \cos\frac{A-B}{2} \text{ và } \cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right) \le 1)$$

$$= 2.2\cos\left(\frac{\frac{A+B+C}{2}+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A+B-C}{2}-\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$

$$\le 4\cos\frac{\pi}{3} \tag{5}$$

Suy ra $\cos A + \cos B + \cos C \le 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

Ta có:

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1-\cos A}{2} + \frac{1-\cos B}{2} + \frac{1-\cos C}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\ge \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Do đó, từ (4) ta có:

$$\sin^6\frac{A}{2} + \sin^6\frac{B}{2} + \sin^6\frac{C}{2} + \frac{6}{64} \ge \frac{3}{16}.\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^6\frac{A}{2} + \sin^6\frac{B}{2} + \sin^6\frac{C}{2} \ge \frac{3}{64}$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C ⇔ ABC là đều

BÀI 20

Chứng minh rằng trong tất cả các tam giác nội tiếp đường tròn cho trước thì tam giác đều có diện tích lớn nhất.

Đại học Công đoàn (1998)

GIẢI

Gọi các cạnh tam giác là a, b, c; diện tích tam giác là S và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Ta có:

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{4R}$$

$$= 2R^2\sin A.\sin B.\sin C \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta suy ra:

$$\sin A\sin B\sin C \le \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3$$

Từ (1) ta suy ra: $S \le 2R^2\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3$ (2)

Ta tính giá trị lớn nhất của $\sin A + \sin B + \sin C$.

Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C + \sin 60^0$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C+60^0}{2}\cos\frac{C-60^0}{2}$$

$$\le 2\sin\frac{A+B}{2} + 2\sin\frac{C+60^0}{2}$$

$$= 2\left(\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C+60^0}{2}\right)$$

$$= 2.2\sin\left(\frac{\frac{A+B}{2} + \frac{C+60^0}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2} - \frac{C+60^0}{2}}{2}\right)$$

$$\le 4\sin\frac{A+B+C+60^0}{4}$$

$\Leftrightarrow$ $\sin A + \sin B + \sin C + \sin 60^0 \le 4\sin 60^0$

$\Rightarrow$ $\sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (3)

Thế (3) vào (2) ta có:

$$S \le 2R^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{3.2}\right)^3 = 2R^2\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\cos\frac{A-B}{2}=1$, $\cos\frac{C-60^0}{2}=1$, $\cos\frac{A+B-C-60^0}{2}=1$, $\Leftrightarrow$ A = B = C. Vậy tam giác nội tiếp đường tròn có diện tích lớn nhất bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ khi ABC là tam giác đều.

BÀI 21

Giả sử các góc A, B, C của tam giác ABC thoả mãn đẳng thức:
cosA + cosB + cosC = 2(cosAcosB+ cosBcosC + cosCcosA)

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Đại học Quốc gia Hà Nội (1998, B)

GIẢI

Hệ thức cần chứng minh:

cosA + cosB + cosC = 2(cosAcosB + cosBcosC + cosCcosA)

Ta có cosA+cosB+cosC$\le\frac{3}{2}$ (bạn đọc tự chứng minh).

Ta có: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx) \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx \qquad (1)$

Cộng $2xy+2yz+2zx$ vào hai vế của (1), ta được:

(1)$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \ge 3(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow \quad (x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$

Áp dụng cho 3 số cosA, cosB, cosC ta có:

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2 \ge 3(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$$

$\Rightarrow \frac{3}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)\geq 3(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \geq 2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \cos A+\cos B+\cos C=\dfrac{3}{2} \\ 3(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)=(\cos A+\cos B+\cos C)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ABC là tam giác đều

BÀI 22

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c và số đo các góc là A, B, C. Chứng minh rằng:

1. $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)\geq 0$

2. $\dfrac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 12$

Đại học Quốc gia T.P. Hồ Chí Minh (1998, A)

GIẢI

1. Ta có:

$ab(a+b+c-3c)+bc(b+c+a-3a)+ca(a+b+c-3b)$

$= ab(a+b+c)-3abc+bc(a+b+c)-3abc+ca(a+b+c)-3abc$

$= (a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc$

Do $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

$ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

nên $(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=9abc$

Do đó: $(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc\geq 0$ (đpcm).

2. Trong tam giác thì $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ và $\frac{C}{2}$ là các góc nhọn nên $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$ và $\sin\frac{C}{2}$ có giá trị dương.

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 3.\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}} \qquad (1)$$

Biết $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$ (xem chứng minh ở cuối bài)

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\leq\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}$$

Do đó vế phải của (1) là:

$$3.\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}\geq\frac{3}{\frac{1}{\sqrt[3]{2^6}}}=12$$

Chứng minh: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)^2\right]\leq 0$$

Bất đẳng thức luôn đúng khi: $\sin\frac{A-B}{2}=0 \quad \Rightarrow A=B$

$$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cos 0^0=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow C=60^0$$

Ta suy ra ΔABC là tam giác đều.

Cách khác.

1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)\geq 0$

Chia bất đẳng thức cho abc, ta có:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b-2c}{c}+\frac{b+c-2a}{a}+\frac{c+a-2b}{b}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{c}-2+\frac{b+c}{a}-2+\frac{c+a}{b}-2\geq 0$$

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-6\geq 0 \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cô si thì:

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{c}.\frac{c}{a}}=2$$

Tương tự:

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2 \ ; \ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$$

Cộng các bất đẳng thức này ta suy ra (3) (đpcm).

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{c}=\frac{c}{a} \ ; \ \frac{b}{c}=\frac{c}{b} \ ; \ \frac{a}{b}=\frac{b}{a} \Leftrightarrow a=b=c$

Do đó ABC là tam giác đều.

2. Ta có:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\le\frac{a^2}{4bc}$$

Suy ra: $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}\ge\dfrac{4bc}{a^2}$

Tương tự: $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}}\ge\dfrac{4ac}{b^2}$; $\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}}\ge\dfrac{4ab}{c^2}$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\ge4\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\right)\ge4.3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}}=12$$

Dấu "=" khi a = b = c và ΔABC là tam giác đều.

BÀI 23

Gọi A, B, C là ba góc tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là có hệ thức:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\cot gA+\cot gB+\cot gC)=\sqrt{3}$$

Đại học Bách khoa Hà Nội (1999)

GIẢI

Ta có:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\cot gA+\cot gB+\cot gC)=\sqrt{3}$$

Điều kiện cần:

Tam giác ABC đều thì $\sin A=\sin B=\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{cotg}A = \text{cotg}B = \text{cotg}C = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Do đó (1):

$$\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3} \quad (\text{VT} = \text{VP})$$

Điều kiện đủ: Từ (1) ta suy ra:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A} - \text{cotg}A\right) + \left(\frac{1}{\sin B} - \text{cotg}B\right) + \left(\frac{1}{\sin C} - \text{cotg}C\right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos A}{\sin A} + \frac{1-\cos B}{\sin B} + \frac{1-\cos C}{\sin C} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\right)^2 = 3$$

Trong mọi tam giác ta có:

$$\begin{cases} \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 1 \\ \text{tg}^2\frac{A}{2} + \text{tg}^2\frac{B}{2} + \text{tg}^2\frac{C}{2} \geq \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 1 \end{cases}$$

nên $\left(\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}\right)^2 =$

$$= \text{tg}^2\frac{A}{2} + \text{tg}^2\frac{B}{2} + \text{tg}^2\frac{C}{2} + 2\left(\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2 \geq 1 + 2 = 3$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A = B = C⇔ ABC là tam giác đều.

BÀI 24

Hãy xác định dạng tam giác ABC để:

cotgA + cotgB + cotgC nhận giá trị nhỏ nhất.

Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông (1999).

GIẢI

Đặt: $T = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C \qquad (1)$

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết $0 < A \leq B \leq C$ nên

$0 < A < B < \frac{\pi}{2}$. Hàm số cotgx lõm trên khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên:

$$\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B \geq 2\operatorname{cotg}\frac{A+B}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Biết $\operatorname{cotg}2a = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 a}{2\operatorname{tg}a} = \dfrac{1}{2\operatorname{tg}a} - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}a$

nên $\operatorname{cotg}C = \dfrac{1}{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}} - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$

Do đó: $T \geq 2\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} + \dfrac{1}{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}} - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad T \geq \frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}} \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta suy ra:

$$T \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}\text{tg}\frac{C}{2}.\frac{1}{2\text{tg}\frac{C}{2}}} = \sqrt{3}$$

$T = \sqrt{3}$ khi và chỉ khi dấu "=" xảy ra ở (2) và (3) nên:

$$\begin{cases} A = B \\ \frac{3}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2\text{tg}\frac{C}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = 60^0 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của cotgA + cotgB + cotgC là $\sqrt{3}$ và khi đó ABC là tam giác đều.

BÀI 25

Tam giác ABC thoả mãn hệ thức:

$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a + b + c} = \frac{1}{2}$. Chứng minh ABC là tam giác đều.

Đại học Dược Hà Nội (1999)

GIẢI

Ta có: $\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a + b + c} = \frac{1}{2}$

Biết $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$

Ta có:

$$\frac{2R\sin A\cos A + 2R\sin B\cos B + 2R\sin C\cos C}{2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 2(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$(\sin 2A + \sin 2B - 2\sin C) + (\sin 2B + \sin 2C - 2\sin A) +$$

$$+ (\sin 2C + \sin 2A - 2\sin B) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin C[\cos(A-B)-1]+2\sin A[\cos(B-C)-1]+2\sin B[\cos(C-A)-1]=0 \quad (3)$$

Vì $\sin A, \sin B, \sin C > 0$ nên từ (3) suy ra:

$$\begin{cases} \cos(A-B) = 1 \Leftrightarrow A = B \\ \cos(B-C) = 1 \Leftrightarrow B = C \\ \cos(C-A) = 1 \Leftrightarrow A = C \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C$$

Suy ra: ABC là tam giác đều.

BÀI 26

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thoả mãn điều kiện:

$$\mathbf{\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$

thì tam giác là đều.

Học viện Kỹ thuật Mật mã (1999)

GIẢI

Hệ thức đã cho:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B = 2\sin(A + B)\cos(A - B)$

$$= 2\sin C\cos(A - B) \leq 2\sin C \quad (1)$$

Tương tự, ta có:

$$\sin 2B + \sin 2C = 2\sin A\cos(B - C) \leq 2\sin A \quad (2)$$

$$\sin 2C + \sin 2A = 2\sin B\cos(C - A) \leq 2\sin B \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một, ta có:

$$2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \leq 2(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C$$

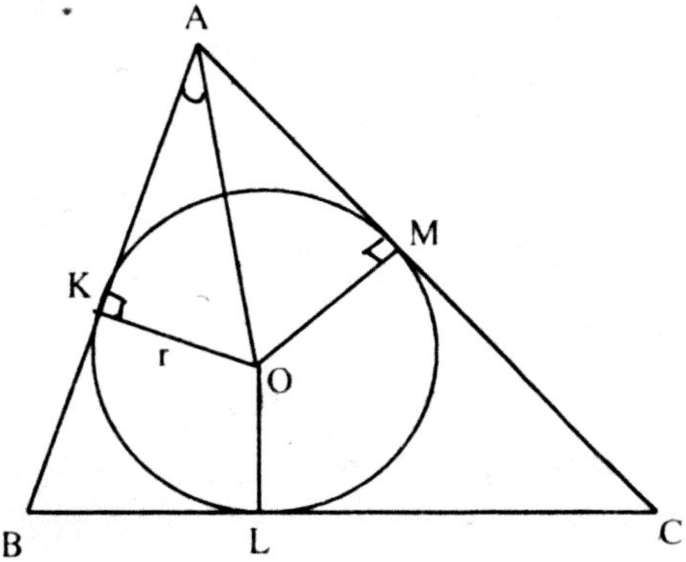
Dấu "=" xảy ra khi $A = B = C \Leftrightarrow$ tam giác ABC là đều.

BÀI 27

Chứng minh rằng để tam giác ABC đều, điều kiện cần và đủ là $p + R = (2 + 3\sqrt{3})r$, trong đó p là nửa chu vi, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Học viện Kỹ thuật Quân sự (1999)

GIẢI



Ta có:

$2(AK + BL + LC) = 2p$

$\Leftrightarrow \quad AK + a = p$

$\Leftrightarrow \quad AK = p - a$

Trong tam giác AKO, ta có:

$$\text{tg}\,\widehat{KAO} = \text{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$$

Suy ra:

$$p - a = \frac{r}{\text{tg}\frac{A}{2}} = r\cot\text{g}\frac{A}{2}$$

Tương tự: $p - b = r\cot\text{g}\frac{B}{2}$, $p - c = r\cot\text{g}\frac{C}{2}$

$$p = (p-a) + (p-b) + (p-c)$$

$$\Rightarrow \quad p = r\left(\cot\text{g}\frac{A}{2} + \cot\text{g}\frac{B}{2} + \cot\text{g}\frac{C}{2}\right) \qquad (1)$$

Biết $\quad \text{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot\text{g}\frac{C}{2} = \frac{1}{\text{tg}\frac{C}{2}}$

và $$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$$

Suy ra: $$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$$

hay: $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$$

Theo bất đẳng thức Cô si với ba số dương $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ ta có:

$$1=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leq\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$$

(Theo bất đẳng thức Cô si ta cũng có:

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\geq 3\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=3\sqrt{3} \qquad (2)$$

Thế $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$ ở (2) vào (1), ta được:

$$p=r\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

$$= r\left(\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}\right) \geq 3\sqrt{3}r$$

Dấu "=" xảy ra khi $\cot g\frac{A}{2} = \cot g\frac{B}{2} = \cot g\frac{C}{2} \Rightarrow A=B=C$

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Ta cũng có:

$$(p - a) + (p - b) = c$$

$$\Leftrightarrow \quad r\left(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2}\right) = 2R\sin C$$

$$\Leftrightarrow \quad r\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{r}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \qquad (3)$$

Biết $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos A)$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}\right) \leq \frac{a^2}{4bc}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

Tương tự:

$$\sin\frac{B}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

$$\sin\frac{C}{2} \le \frac{c}{2\sqrt{ab}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

Từ (3) ta có: $R = \dfrac{r}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \ge \dfrac{r}{4.\frac{1}{8}} = 2r$

Dấu "=" xảy ra khi $b - c = c - a = a - b$, $\Rightarrow$ ABC đều.

Vậy trong mọi tam giác ta có:

$$p + R \ge 3\sqrt{3} + 2r = (3\sqrt{3} + 2)r$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

BÀI 28

1. Giải phương trình lượng giác:

$$\mathbf{\sin^3x\cos3x + \cos^3x\sin3x = \sin^34x}$$

2. Các góc tam giác thoả mãn:

$$\mathbf{\cot gA + \cot gB + \cot gC = tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Đại học Ngoại thương (1999, A và D)

GIẢI

1. Ta có: $\sin^3x\cos3x + \cos^3x\sin3x = \sin^34x$

Biết $\cos3x = 4\cos^3x - 3\cos x$

$\sin3x = 3\sin x - 4\sin^3x$

Từ (1) suy ra:

$$\sin^3x(4\cos^3x - 3\cos x) + \cos^3x(3\sin x - 4\sin^3x) = \sin^34x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin x\cos x(\cos^2x - \sin^2x) = \sin^34x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\sin 2x.\cos 2x = \sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin 4x = 4\sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{12}} \quad (k \in Z)$$

2. Ta có:

$$\text{cotgA} + \text{cotgB} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A.\sin B} = \frac{\sin C}{\frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]}$$

$$= \frac{2\sin C}{\cos(A-B)+\cos C} \geq \frac{2\sin C}{1+\cos C} = 2\text{tg}\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Dấu "=" xẩy ra khi A = B

Tương tự ta có:

$$\text{cotgB} + \text{cotgC} \geq 2\text{tg}\frac{A}{2} \quad (2)$$

$$\text{cotgC} + \text{cotgA} \geq 2\text{tg}\frac{B}{2} \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) ta được:

$$\text{cotgA} + \text{cotgB} + \text{cotgC} \geq \text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C ⇔ ABC là tam giác đều.

BÀI 29

Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A \\ \text{tgB} + \text{tgC} = 2\text{tgA} \end{cases}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Đại học Sư phạm Vinh (1999, D, E)

GIẢI

Ta có: $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A & (1) \\ \text{tg}B + \text{tg}C = 2\text{tg}A & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\frac{B-C}{2} = 4\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+\cos(B-C)}{2} = 4\,\frac{1-\cos A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \cos(B-C) = 4 - 4\cos A \qquad (3)$$

Từ phương trình (2) ta có:

$$\text{tg}B + \text{tg}C = \frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C} = 2\,\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin A}{\cos B\cos C} = \frac{2\sin A}{\cos A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = 2\cos B\cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \cos(B+C) + \cos(B-C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos A = \cos(B-C) \qquad (4)$$

Thế cos(B – C) ở (4) vào (3) ta được:

$$1 + 2\cos A = 4 - 4\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = 60^0$$

Do đó từ (4) $\Rightarrow \cos(B-C) = 1 \Leftrightarrow B - C = 0 \Rightarrow B=C$.

Vậy tam giác ABC đều.

BÀI 30

Các góc A, B, C của tam giác ABC thoả mãn:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{9}{4}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Đại học Dân lập Đông Đô (2000, A)

GIẢI

Ta có: $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{9}{4}$ (1)

Tính: $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{\pi}{6}\le 2\cos\frac{A+B}{4}+2\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)$

$$\le 4\cos\left(\frac{A+B+C}{8}+\frac{\pi}{24}\right)$$

$$=4\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le 2\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2)

Biết: $(ab+bc+ac)\le\frac{(a+b+c)^3}{3}$ nên:

$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2}{3}$ (3)

Thế (2) vào vế trái của (3) ta được:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\le\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$$

$$\le\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{3}$$

$$\le\frac{9}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C ⇒ ΔABC là tam giác đều.

BÀI 31

ABC là tam giác bất kỳ, chứng minh:

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A\cos B\cos C$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Đại học Dược Hà Nội (2000)

GIẢI

Ta phải chứng minh:

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A\cos B\cos C \qquad (1)$$

(1) luôn đúng khi ABC là tam giác vuông (vế phải = 0) hay ABC là tam giác tù (vế phải < 0)

Khi ABC là tam giác có 3 góc nhọn, ta có:

$$\operatorname{tg}A = -\operatorname{tg}(B + C) = -\frac{\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C}{1 - \operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}A - \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C = -\operatorname{tg}B - \operatorname{tg}C$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

Ta cũng có:

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{B+C}{2}} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

và $\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = \dfrac{2\sin C}{\cos(A - B) + \cos(A + B)} \geq \dfrac{2\sin C}{1 - \cos C}$

$$= 2\operatorname{cotg}\frac{C}{2} \quad (1)$$

Tương tự: $\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \geq 2\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}$, dấu "=" xảy ra khi B = C (2)

$\operatorname{tg}C + \operatorname{tg}A \geq 2\operatorname{cotg}\dfrac{B}{2}$, dấu "=" xảy ra khi C = A (3)

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một ta có:

$$\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C \geq \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C \geq \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C} \geq \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} \geq \cos A\cos B\cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \geq \cos A\cos B\cos C$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C ⇒ ABC là tam giác đều.

BÀI 32

Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là:

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin A + b\sin B + c\sin C} = \frac{2p}{9R}$$

trong đó p là nửa chu vi, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Đại học Kiến trúc Hà Nội (2000)

GIẢI

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin A + b\sin B + c\sin C} = \frac{2p}{9R} \qquad (1)$$

Thế $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$

và $2p = a + b + c$ vào (1) ta được:

$$\frac{2R(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C)}{2R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} = \frac{a+b+c}{9R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{4(\sin A + \sin B + \sin C)}{9} \qquad (2)$$

Biến đổi: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)$

$= 4\sin A\sin B\sin C$

Từ (2) $\Rightarrow$ $9\sin A\sin B\sin C = (\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)(\sin A+\sin B+\sin C)$

$$\geq 3\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}\,.3\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=9\sqrt[3]{\sin^3 A\sin^3 B\sin^3 C} \qquad (3)$$

$\Leftrightarrow$ $\sin A = \sin B = \sin C$

$\Leftrightarrow$ $a = b = c \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

BÀI 33

1. Cho hai số a, b thoả mãn điều kiện $a + b \geq 0$, chứng tỏ rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

2. Trong mọi tam giác ABC những tam giác nào làm cho biểu thức sau:

$$\frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}}$$

đạt giá trị lớn nhất?

Đại học Bách khoa Hà Nội (2000)

GIẢI

1. Chứng minh: $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$

(1) $\Leftrightarrow$ $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$

$\Leftrightarrow$ $(a + b)[4(a^2 - ab + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2)] \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(a + b)(3a^2 + 3b^2 - 6ab) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $3(a + b)(a - b)^2 \geq 0$

Với điều kiện $a + b \geq 0$ nên (2) luôn đúng.

Dấu "đẳng thức" xảy ra khi $a = b$

2. Theo câu 1 ta suy ra:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{2}\right)^3 \le \frac{\sin B+\sin C}{2} = \sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le \cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{2} \le \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} \qquad (1)$$

Tương tự: $$\frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin C}}{2} \le \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} \qquad (2)$$

$$\frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}}{2} \le \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một, ta được:

$$\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C} \le \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}} \le 1$$

Biểu thức trên đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi :

$$\sqrt[3]{\sin A} = \sqrt[3]{\sin B} = \sqrt[3]{\sin C}$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A-C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} = 1$$

$\Leftrightarrow$ $A = B = C \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

BÀI 34

Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \sin B = (\sqrt{2}-\cos C)\sin A \\ \sin C = (\sqrt{2}-\cos B)\sin A \end{cases}$$

Hỏi tam giác ABC là tam giác gì? Chứng minh.

Đại học Thuỷ lợi Hà Nội (2000)

GIẢI

$$\begin{cases} \sin B = (\sqrt{2} - \cos C)\sin A & (1) \\ \sin C = (\sqrt{2} - \cos B)\sin A & (2) \end{cases}$$

Trừ (1) và (2) từng vế một ta có:

$$\sin B - \sin C = \sin A(\cos B - \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2} = \sin A\left(-2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \sin A\sin\frac{B+C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin A\cos\frac{A}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{B-C}{2} = 0 \Rightarrow \frac{B-C}{2} = 0$$

$$\Rightarrow B = C$$

(Do $\sin\frac{A}{2} + \sin A\cos\frac{A}{2} > 0$).

Thay B = C vào (1) ta được:

$$\sin B = (\sqrt{2} - \cos B)\sin(B + C)$$

$$= (\sqrt{2} - \cos B)\sin 2B$$

$$= (\sqrt{2} - \cos B)\, 2\sin B\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = (\sqrt{2} - \cos B)\, 2\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 B - 2\sqrt{2}\cos B + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{2}\cos B - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \frac{\pi}{4} = C, \text{ suy ra } A = \frac{\pi}{2}$$

Vậy ABC là tam giác vuông cân.

BÀI 35

Giả sử a, b, c lần lượt là ba cạnh đối diện với ba góc A, B, C của tam giác ABC, thoả mãn điều kiện:

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}, \ \sin\frac{B}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Cao đẳng Sư phạm Kỹ thuật (2000)

GIẢI

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \qquad (1)$$

$$\sin\frac{B}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}} \qquad (2)$$

Theo định lý hàm số cosin ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

suy ra: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}} \le \sqrt{\frac{a^2}{4bc}} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra dấu "=" xảy ra khi b = c.

Tương tự ta có:

$$\sin\frac{B}{2} \le \frac{b}{2\sqrt{ac}} \qquad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra dấu "=" xảy ra khi a = c.

Vậy ABC là tam giác đều.

BÀI 36

Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \dfrac{1+\cos C}{\sin C} = \dfrac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}} \\ a^2(b+c-a) = b^3+c^3-a^3 \end{cases}$$

Đại học Y Thái Bình (2000)

GIẢI

$$\begin{cases} \dfrac{1+\cos C}{\sin C} = \dfrac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}} & (1) \\ a^2(b+c-a) = b^3+c^3-a^3 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{1+\cos C}{\sin C} = \frac{2\cos^2\dfrac{C}{2}}{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{cotg}^2\frac{C}{2} = \frac{(2a+b)^2}{4a^2-b^2} = \frac{2a+b}{2a-b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}} - 1 = \frac{2a+b}{2a-b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}} = 1 + \frac{2a+b}{2a-b} = \frac{4a}{2a-b}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a-b = 4a\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 2a(1-2\sin^2\frac{C}{2})$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 2a.\cos C$$

$\Leftrightarrow \quad \sin B = 2\sin A.\cos C$

$\Leftrightarrow \quad \sin(A + C) = 2\sin A.\cos C$

$\Leftrightarrow \quad \sin(A - C) = 0$

Do $-\pi < A - C$ nên suy ra $A - C = 0 \Rightarrow A = C$

$(2) \Leftrightarrow \quad a^2(b + c - a) = b^3 + c^3 - a^3$

$\Leftrightarrow \quad a^2(b + c) = b^3 + c^3 = (b + c)(b^2 + c^2 - bc)$

$\Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - bc$

$\Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc$

$\Rightarrow \quad \cos A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{3}$

Vậy ABC là tam giác đều.

BÀI 37

Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu các góc của nó thoả mãn hệ thức:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội (2000)

GIẢI

Biết sinA, sinB, sinC > 0 nên:

$$\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin B \sin C}} \geq \frac{2}{\frac{\sin B + \sin C}{2}} \geq \frac{2}{\cos\frac{A}{2}} \qquad (1)$$

Tương tự: $\dfrac{1}{\sin A} + \dfrac{1}{\sin C} \geq \dfrac{2}{\cos\frac{B}{2}}$ (2)

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \geq \frac{2}{\cos\frac{C}{2}} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một ta được:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\ge\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

Dấu "đẳng thức" xảy ra khi A = B = C ⇔ ΔABC đều.

Bài 38

Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thoả mãn hệ thức:

$$\mathbf{cotg\frac{A}{2}\,cotg\frac{B}{2}\,cotg\frac{C}{2}-\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)=cotgA+cotgB+cotgC}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Đại học Sư phạm Hà Nội (2000, A)

GIẢI

$$\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}-\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)=\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C\ (1)$$

Ta có: $\text{cotg}\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{\text{cot g}\frac{B}{2}\,\text{cot g}\frac{C}{2}-1}{\text{cot g}\frac{B}{2}+\text{cot g}\frac{C}{2}}=\text{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{\text{cot g}\frac{A}{2}}$

$$\Leftrightarrow\quad \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}-\text{cotg}\frac{A}{2}=\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \text{cotg}\frac{A}{2}\ \text{cotg}\frac{B}{2}\ \text{cotg}\frac{C}{2}=\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}$$

và $\quad \text{cotg}\dfrac{A}{2}-\text{cotg}A=\dfrac{\sin(A-\frac{A}{2})}{\sin\frac{A}{2}\sin A}=\dfrac{1}{\sin A}$

$$\text{cotg}\frac{B}{2}-\text{cotg}B=\frac{\sin\left(B-\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin B}=\frac{1}{\sin B}\qquad(3)$$

$$\text{cotg}\frac{C}{2}-\text{cotg}C=\frac{\sin\left(C-\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}\sin C}=\frac{1}{\sin C}\qquad(4)$$

Từ (1) ta có: $\text{cotg}\frac{A}{2}-\text{cotg}A+\text{cotg}\frac{B}{2}-\text{cotg}B+\text{cotg}\frac{C}{2}-\text{cotg}C=$

$$=\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\qquad(5)$$

Cộng (2), (3) và (4) ta được:

$$\text{cotg}\frac{A}{2}-\text{cotg}A+\text{cotg}\frac{B}{2}-\text{cotg}B+\text{cotg}\frac{C}{2}-\text{cotg}C=$$

$$=\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\qquad(6)$$

Từ (5) và (6) suy ra:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

Do $\sin A>0$; $\sin B>0$ nên:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\geq\frac{2}{\sqrt{\sin A\sin B}}\geq\frac{2}{\frac{\sin A+\sin B}{2}}\geq\frac{2}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq\frac{2}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin C}\geq\frac{2}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C} \geq \frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C $\Leftrightarrow$ ΔABC là tam giác đều.

BÀI 39

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2}$$

Đại học Phòng cháy chữa cháy (2000)

GIẢI

Ta có:
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1=\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{b+c+a}{c+a}+\frac{c+a+b}{a+b}+1=\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{9}{2} \qquad (2)$$

Ta có:

$$[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=9$$

$$(a+b)+(b+c)+(c+a) \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \qquad (3)$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)}} \qquad (4)$$

Thế (3) và (4) vào vế trái của (2) ta được :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

a + b = b + c = c + a $\Leftrightarrow$ a=b=c $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

BÀI 40

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có:

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq 27$$

Khi nào xảy ra đẳng thức?

Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh (2000 A, B)

GIẢI

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq 27$$

Biết (1+a)(1+b)(1+c) = abc+(ab+ac+bc)+(a+b+c) +1

và $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2} > 0$ nên $\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$

$$= \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + \left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{3}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) + 1$$

$$\geq \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right)} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}} + 1$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\right)^2$$

Tính $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$, ta được $0 < \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}} \ge \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Do đó từ (1) ta có: $\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\right)^2 \ge (1+2)^3 = 27$

Dấu " = " xảy ra khi $\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2} = \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow A = B = C$

Bài 41

Cho tam giác ABC có các góc A, B, C nhọn thoả mãn hệ thức:

$$\frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} = \frac{1}{2\cos A.\cos B.\cos C}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Đại học Sư phạm Hà Nội (2001, A)

GIẢI

Theo giả thiết ΔABC là tam giác nhọn ta có:

$$\frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} \ge \frac{2}{\sin 2A.\sin 2B} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} \ge \frac{2}{\sin 2B.\sin 2C} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sin^2 2C} + \frac{1}{\sin^2 2A} \geq \frac{2}{\sin 2C . \sin 2AB} \qquad (3)$$

Cộng (1). (2) và (3) từng vế một và rút gọn ta được:

$$\text{Vế trái} \geq \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A . \sin 2B . \sin 2C} = \frac{1}{2\cos A . \cos B . \cos C}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sin 2A = \sin 2B = \sin 2C \Leftrightarrow A = B = C$

Vậy ΔABC là tam giác đều.

Bài 42

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu ta có: $\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b} = \frac{c}{m_c}$ ở đây m_a, m_b, m_c theo thứ tự là các trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C.

Đại học Văn hoá (2001)

GIẢI

Ta có: $\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b}$ nên $\frac{a^2}{m_a^2} = \frac{b}{m_b^2} \Rightarrow a^2 m_b^2 = b^2 m_a^2$

Trong Δ ABC với m_a, m_b là trung tuyến thuộc cạnh a và b, ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2} \text{ và } m_b^2 = \frac{a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}}{2} \qquad (2)$$

Thế m_a^2 và m_b^2 ở (2) vào (1) ta được:

$$a^2\left(\frac{a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}}{2}\right) = b^2\left(\frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4 + a^2c^2 - \frac{a^2b^2}{4} = b^4 + b^2c^2 - \frac{a^2b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4 - b^4 + c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2).(a^2 + b^2 + c^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

Cũng chứng minh tương tự, từ $\frac{b}{m_b} = \frac{c}{m_c}$ ta suy ra $b = c$

Do đó $a = b = c$ nên Δ ABC là tam giác đều.

Bài 43

Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$$

GIẢI

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$$

Biết $\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$ và $\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$ nên từ (1)

ta có:

$$\frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} = \frac{1 + \cos A}{2} + \frac{1 + \cos B}{2} + \frac{1 + \cos B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) = \cos A + \cos B + \cos C \qquad (2)$$

Biến đổi vế trái ta được

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C$$

Biến đổi vế phải ta được

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Do đó từ (2) $\Rightarrow$ $\cos A\cos B\cos C = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (3)

Ta có:

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A - B) + \cos(A + B)\right] \le \frac{1}{2}(1 - \cos C) = \sin^2\frac{C}{2}$$

Tương tự

$$\cos B\cos C \le \sin^2\frac{A}{2} \quad \text{và} \quad \cos A\cos C \le \sin^2\frac{B}{2}$$

Do đó suy ra $\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C \le \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A\cos B\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Dấu " = " xảy ra khi $A = B = C$

$\Leftrightarrow$ Δ ABC là tam giác đều

Bài 44

Chứng minh rằng nếu có :

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$ **thì ABC là tam giác đều**

Viện Đại học Mở Hà Nội (2001)

GIẢI

Theo bất đẳng thức Côsi với 2 số dương $\frac{1}{\sin A},\frac{1}{\sin B}$ ta có:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\ge\frac{2}{\sqrt{\sin A\sin B}}\ge\frac{2}{\frac{\sin A+\sin B}{2}}=\frac{2}{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\ge\frac{2}{\cos\frac{C}{2}} \quad (1)$$

Tương tự: $$\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\ge\frac{2}{\cos\frac{A}{2}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sin C}+\frac{1}{\sin A}\ge\frac{2}{\cos\frac{B}{2}} \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một ta được:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\ge\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

Dấu " = " xảy ra khi $\sin A = \sin B = \sin C$

và $\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{C-A}{2}$

$\Leftrightarrow$ $A = B = C$ $\Leftrightarrow$ Δ ABC là tam giác đều (đpcm)

Bài 45

Tam giác ABC là tam giác gì nếu các góc của nó thỏa mãn đẳng thức sau : $\cot g^2A + \cot g^2B + \cot g^2C + 3 = \dfrac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$

Học viện Khoa học Quân sự (2001)

GIẢI

Ta có: $$\cot g^2A + \cot g^2B + \cot g^2C + 3 = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \cot g^2A + \cot g^2B + \cot g^2C + 3 = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\cot g^2A+1+\cot g^2B+1+\cot g^2C = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin^2A} + \frac{1}{\sin^2B} + \frac{1}{\sin^2C} = \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin A.\sin B.\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin^2B\sin^2C + \sin^2C\sin^2A + \sin^2A\sin^2B}{\sin^2A\sin^2B\sin^2C} = \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin A\sin B\sin C} \quad (2)$$

Biết $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Do đó (2) $\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2B\sin^2C + \sin^2C\sin^2A + \sin^2A\sin^2B}{\sin A\sin B\sin C} = \sin A + \sin B + \sin C$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2B\sin^2C+\sin^2C\sin^2A+\sin^2A\sin^2B = \sin A\sin B\sin C(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2B\sin^2C + 2\sin^2C\sin^2A + 2\sin^2A\sin^2B -$$
$$- 2\sin^2A\sin B\sin C - 2\sin^2B\sin A\sin C - 2\sin^2C\sin A\sin B = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin B.\sin C - \sin C.\sin A)^2+(\sin C.\sin A - \sin A.\sin B)^2+(\sin A.\sin B - \sin B.\sin C)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin B.\sin C = \sin C.\sin A = \sin A.\sin B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A = \sin B = \sin C \quad \Leftrightarrow \quad A = B = C$$

Vậy ABC là tam giác đều.

Bài 46

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh và S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu: $a+b+c = 2\sqrt[4]{27S^2}$ thì tam giác ABC đều.

Cao đẳng Sư phạm Hà Nội (2001, A)

GIẢI

Ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Do p, p - a, p - b, p - c là những số dương nên theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \le \sqrt{p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3}$

⇒

$\Rightarrow \quad p^4 \ge 27S^2 \quad \Rightarrow \quad p \ge \sqrt[4]{27S^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{a+b+c}{2} \ge \sqrt[4]{27S^2} \quad \Rightarrow \quad a+b+c \ge 2\sqrt[4]{27S^2}$

Dấu "=" xảy ra khi p - a = p - b = p - c ⇔ a = b = c nên ΔABC đều

Bài 47

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều nếu các góc của nó thỏa mãn hệ thức: cosA.cosB. cosC = 1/8

Cao đẳng Công nghiệp Hà Nội (2001)

GIẢI

Xem bài 60 (trang 105), chứng minh

$$\cos A\cos B\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

và bài 3 (trang 16); chứng minh $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

Dấu " = " xảy ra khi ABC là tam giác đều.

Bài 48

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\text{cotg}^2\frac{A}{2} + \text{cotg}^2\frac{B}{2} + \text{cotg}^2\frac{C}{2} \ge 9$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Đại học Sư phạm Hà Nội (2000,A)

GIẢI

Ta có:

$$\left(1\text{cotg}\frac{A}{2}+1\text{cotg}\frac{B}{2}+1\text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2\le 3\left(\text{cotg}^2\frac{A}{2}+\text{cotg}^2\frac{B}{2}+\text{cotg}^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{3}\left(\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2\le\left(\text{cotg}^2\frac{A}{2}+\text{cotg}^2\frac{B}{2}+\text{cotg}^2\frac{C}{2}\right)\quad(1)$$

Biết: $\text{cotg}\frac{A}{2}=\text{tg}\frac{B+C}{2}=\dfrac{1}{\text{cotg}\frac{B+C}{2}}=\dfrac{\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}}{\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}-1}$

$$\Leftrightarrow\quad \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}-\text{cotg}\frac{A}{2}=\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}=\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}\quad(2)$$

Với 3 số dương $\text{cotg}\frac{A}{2}$, $\text{cotg}\frac{B}{2}$, $\text{cotg}\frac{C}{2}$ ta cũng có:

$$\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}\ge 3\sqrt[3]{\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}\right)^3\ge 27\left(\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}\right)\quad(3)$$

Thế (2) vào (3) ta được:

$$\left(\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}\right)^3\ge 27\left(\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{3}\left(\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{B}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2\ge 9\quad(4)$$

Từ (1) và (4) suy ra:

$$\text{cotg}^2\frac{A}{2}+\text{cotg}^2\frac{B}{2}=\text{cotg}^2\frac{C}{2}\ \ge 9\ (\text{đpcm})$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\text{cotg}\frac{A}{2}=\text{cotg}\frac{B}{2}=\text{cotg}\frac{C}{2}\ \Leftrightarrow\ A=B=C$$

Do đó ΔABC là tam giác đều đều.

Bài 49

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 1. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các trung tuyến lần lượt kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi : $\frac{\sin A}{m_a} = \frac{\sin B}{m_b} = \frac{\sin C}{m_c} = \sqrt{3}$

Đại học Bách khoa Hà Nội (2001, A và D)

GIẢI

Điều kiện cần: Nếu Δ ABC đều cạnh a, ta có:

$$m_a = m_b = m_c = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}R\sin A}{2} = \sqrt{3}\sin A$$

Do đó $\frac{\sin A}{m_a} = \frac{\sin B}{m_b} = \frac{\sin C}{m_c} \Leftrightarrow \frac{\sin A}{m_a} + \frac{\sin B}{m_b} + \frac{\sin C}{m_c} = \sqrt{3}$

Điều kiện đủ: Biết: $b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2$

Cộng a^2 vào hai vế, ta có: $b^2 + c^2 + a^2 = \frac{3a^2}{2} + 2m_a^2 \geq 2\sqrt{3}a.m_a$

Suy ra: $\frac{1}{m_a} \geq \frac{2\sqrt{3}a}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow \frac{a}{m_a} \geq \frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ (1)

Tương tự ta có: $\frac{b}{m_b} \geq \frac{2\sqrt{3}b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ (2)

$\frac{c}{m_c} \geq \frac{2\sqrt{3}c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ (3)

Cộng (1), (2), (3) từng vế một rồi rút gọn ta được:

$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2R\sin A}{m_a} + \frac{2R\sin B}{m_b} + \frac{2R\sin C}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$$

Do R = 1 nên ta có: $\frac{\sin A}{m_a} + \frac{\sin B}{m_b} + \frac{\sin C}{m_c} \geq \sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} 2m_a^2 = \frac{3}{2}a^2 \\ 2m_b^2 = \frac{3}{2}b^2 \\ 2m_c^2 = \frac{3}{2}c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}a^2 \\ a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} = \frac{3}{2}b^2 \\ a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = \frac{3}{2}c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = 2a^2 \\ a^2 + c^2 = 2b^2 \\ a^2 + b^2 = 2c^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ là tam giác đều

V. TAM GIÁC NHỌN :

BÀI 1

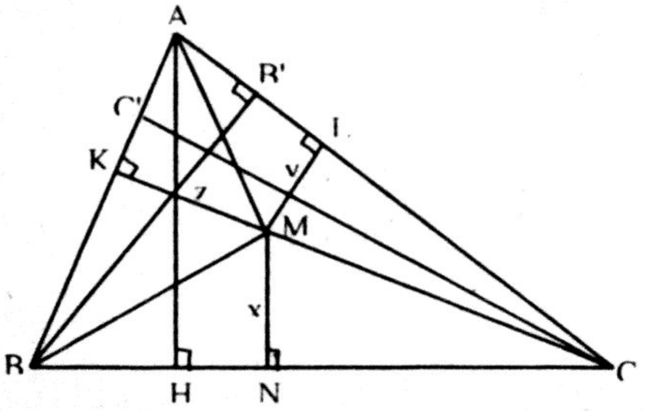
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. M là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Gọi x, y, z lần lượt là các khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$$

trong đó a, b, c là 3 cạnh còn R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Khi nào dấu bằng xảy ra ?

Đại học Quốc gia Hà Nội (1994, A)

GIẢI



Đặt MN = x ; ML = y ; MK=z

$AH = h_a$; $BB' = h_b$; $CC' = h_c$

Ta có: $$\frac{x}{h_a}=\frac{dt\Delta BMC}{dt\Delta ABC}\quad(1)$$

$$\frac{y}{h_b}=\frac{dt\Delta AMC}{dt\Delta ABC}\quad(2)$$

$$\frac{z}{h_c}=\frac{dt\Delta AMB}{dt\Delta ABC}\quad(3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế, ta có $\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1$

Do đó: $$h_a+h_b+h_c=(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}\right)\ge$$

$$\ge\left(\sqrt{h_a}\sqrt{\frac{x}{h_a}}+\sqrt{h_b}\sqrt{\frac{y}{h_b}}+\sqrt{hc}\sqrt{\frac{z}{h_c}}\right)^2$$

(theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki)

Suy ra: $$\sqrt{h_a+h_b+h_c}\ge\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\quad(4)$$

Ta lại có: $h_a = b\sin C$; $h_b = c\sin A$; $h_c = a\sin B$

nên $\sqrt{h_a + h_b + h_c} = \sqrt{b\sin C + c\sin A + a\sin B}$

$$= \sqrt{b\frac{c}{2R} + c\frac{a}{2R} + a\frac{b}{2R}} \le \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}} \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) ta suy ra đpcm.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều và M là trọng tâm.

BÀI 2

Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1 \\ \sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tam giác đó có ít nhất một góc bằng 36^0

Đại học Cần Thơ (1995)

GIẢI

Ta có: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C$

$$= 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2(A + B)$$

$$= 1 + \cos(A + B)[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$= 1 - \cos C\,(2\cos A\cos B)$$

$$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

Do $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$ nên $\cos A\cos B\cos C > 0$ suy ra tam giác ABC có 3 góc nhọn.

Ta có: $\sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 2\sin\frac{5(A+B)}{2}.\cos\frac{5(A-B)}{2} + \sin 5C$ (1)

Biết $\sin 5C = \sin 5[\pi - (A+B)]$

$$= \sin[\pi - 5(A+B)] = \sin 5(A+B)$$

$$= 2\sin\frac{5(A+B)}{2}\cos\frac{5(A+B)}{2} \qquad (2)$$

Thế (2) vào vế phải của (1) ta được:

$$\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C = 2\sin\frac{5(A+B)}{2}\left[\cos\frac{5(A-B)}{2}+\cos\frac{5(A+B)}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{5(A+B)}{2}.2\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}$$

$$= 4\sin\frac{5(\pi-C)}{2}\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{5C}{2}\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}$$

Theo giả thiết ta suy ra:

$\cos\frac{5A}{2}=0$ hoặc $\cos\frac{5B}{2}=0$ hoặc $\cos\frac{5C}{2}=0$

chẳng hạn $\cos\frac{5A}{2}=0$ thì $\frac{5A}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow A=\frac{\pi}{5}+2k\frac{\pi}{5}$

Vì A là góc nhọn, ta chọn k = 0 suy ra $A=\frac{\pi}{5}=36^0$.

BÀI 3

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn và $A \geq B \geq C$

1/ Chứng minh rằng tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC

2/ Đặt tgAtgB = p, tgAtgC = q

Chứng minh rằng $(p-1)(q-1) \geq 4$

Đại học Tổng hợp T P.Hồ Chí Minh (1995)

GIẢI

1/ Trong tam giác ta có: $A+B+C=\pi$ suy ra $A=\pi-(B+C)$

Ta có: $\text{tg}A = \text{tg}(\pi-(B+C)) = -\text{tg}(B+C)$

$$\text{tg}A = -\frac{\text{tg}B+\text{tg}C}{1-\text{tg}B\text{tg}C} = \frac{\text{tg}B+\text{tg}C}{\text{tg}B\text{tg}C-1}$$

suy ra: $\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C - \text{tg}A = \text{tg}B+\text{tg}C$

hay $\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C = \text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C$

2/ Thế giá trị của p và q vào bất đẳng thức:

$$(p-1)(q-1) \geq 4$$

Ta được: $(\text{tg}A\text{tg}B - 1)(\text{tg}A\text{tg}C - 1) \geq 4$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B} - 1\right)\left(\frac{\sin A\sin C}{\cos A\cos C} - 1\right) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sin A\sin B - \cos A\cos B}{\cos A\cos B}\right)\left(\frac{\sin A\sin C - \cos A\cos C}{\cos A\cos C}\right) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{-\cos(A+B)}{\cos A\cos B}\right)\left(\frac{-\cos(A+C)}{\cos A\cos C}\right) \geq 4 \qquad (1)$$

Biết $-\cos(A+B) = \cos C$ (2 góc bù nhau)

$-\cos(A+C) = \cos B$

Do đó (1) tương đương:

$$\frac{1}{\cos A.\cos A} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 A \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A \geq \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3A \geq \pi = A + B + C$$

$$\Leftrightarrow \quad 2A \geq B + C$$

$$\Leftrightarrow \quad (A - B) + (A - C) \geq 0 \qquad (2)$$

(2) đúng với giả thiết $A \geq B \geq C$.

BÀI 4

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc nhọn thì:

$$(2 - \cos^2 A)(2 - \cos^2 B)(2 - \cos^2 C) > 4$$

Đại học Luật Hà Nội (1996)

GIẢI

Hệ thức phải chứng minh:

$$(2 - \cos^2 A)(2 - \cos^2 B)(2 - \cos^2 C) > 4$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C +$$
$$+ \sin^2 A\sin^2 C + \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C > 4$$

Tam giác ABC có 3 góc nhọn nên sinA, sinB, sinC, cosA, cosB, cosC đều > 0. Do đó:

$$\sin A\sin B > \sin A\sin B - \cos A\cos B$$
$$= -\cos(A + B) = \cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin^2 B > \cos^2 C$$

Tương tự $\sin^2 B\sin^2 C > \cos^2 A$

$\sin^2 A\sin^2 C > \cos^2 B$

Như vậy vế trái của hệ thức (1) trở thành:

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C)$$
$$> 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$$
$$= 1 + (\sin^2 A + \cos^2 A) + (\sin^2 B + \cos^2 B) + (\sin^2 C + \cos^2 C) + \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$$

$$= 1 + 3 + \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C > 4 \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI 5

Giả sử ABC là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh:

$$\mathbf{tg^6A + tg^6B + tg^6C \geq 81}$$

Đại học Thương mại (1996)

GIẢI

Trong tam giác ta có: $A + B = \pi - C$

$$\Rightarrow \quad tg(A + B) = tg(\pi - C) = -tgC$$

$$\Rightarrow \quad \frac{tgA + tgB}{1 - tgA.tgB} = -tgC \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \text{tgA} + \text{tgB} + \text{tgC} = \text{tgAtgBtgC}$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\text{tgAtgBtgC} = \text{tgA} + \text{tgB} + \text{tgC} \ge 3\sqrt[3]{\text{tgAtgBtgC}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad (\text{tgA.tgB.tgC})^3 \ge 27\text{tgA.tgB.tgC}$$

$$\Rightarrow \qquad (\text{tgA.tgB.tgC})^2 \ge 27$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta cũng có:

$$\begin{aligned} \text{tg}^6\text{A} + \text{tg}^6\text{B} + \text{tg}^6\text{C} &\ge 3\sqrt[3]{\text{tg}^6\text{Atg}^6\text{Btg}^6\text{C}} \\ &= 3\text{tg}^2\text{Atg}^2\text{Btg}^2\text{C} \\ &\ge 3.27 = 81 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

BÀI 6

Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thoả mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 > 200$ và có bán kính đường tròn ngoại tiếp R = 5. Chứng minh rằng ABC là tam giác có ba góc nhọn.

Đại học Công đoàn (1996)

GIẢI

Từ bất đẳng thức đã cho $a^2 + b^2 + c^2 > 200$ ta suy ra:

$$(2R\sin A)^2 + (2R\sin B)^2 + (2R\sin C)^2 > 200$$

$$\Leftrightarrow \qquad 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 200$$

$$\Leftrightarrow \qquad 4.5^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 200$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2 \qquad (1)$$

Biến đổi vế trái ta có:

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C \\ &= 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C \\ &= 2 - \cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2 C \end{aligned}$$

$$= 2 + \cos C\cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C\,[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\cos A\cos B\cos C > 0$ nên A, B, C là ba góc nhọn.

BÀI 7

Các góc của tam giác ABC thoả mãn hệ thức:

$$\sin^2 A+\sin^2 B = \sqrt[9]{\sin C}$$

Biết rằng các góc A và B nhọn, hãy tính giá trị góc C.

Đại học Ngoại thương (1997. A)

GIẢI

Biết $0 < \sin C \le 1$ nên $\sqrt[9]{\sin C} \ge \sin^2 C$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A + \sin^2 B \ge \sin^2 C$$

Suy ra $a^2 + b^2 \ge c^2$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \ge a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

hay $2ab\cos C \ge 0$

$$\Rightarrow \quad \cos C \ge 0 \qquad (1)$$

Ta có: $\sqrt[9]{\sin C} + \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

Vế trái: $\sqrt[9]{\sin C} + \sin^2 C \le 2$

Tính vế phải:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{1}{2}2\cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C\cos(A - B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$= 2 + 2\cos A.\cos.B\cos C$$

Do đó: $2 + 2\cos A\cos B\cos C \le 2$

Nên: $\cos A\cos B\cos C \le 0$ (2)

Vì A, B là góc nhọn nên cosA.cosB có giá trị dương nên từ (2) ta suy ra: $\cos C \le 0$. (3)

Từ (1) và (3), suy ra $\cos C = 0 = \cos 90^0$. Vậy $\boxed{C = 90^0}$.

BÀI 8

Chứng minh rằng nếu ba góc A, B, C của tam giá ABC thoả mãn điều kiện:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$$

thì ba góc A, B, C là nhọn.

Đại học An ninh

GIẢI

Biến đổi vế trái bằng cách áp dụng $\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$;

$\sin^2 B = \frac{1 - \cos 2B}{2}$, ta có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C\cos(A - B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C[\cos(A - B) - \cos C]$$

$$= 2 + \cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

Theo bài ra ta suy ra: $2 + 2\cos A\cos B\cos C > 2$

$$\Rightarrow \quad \cos A\cos B\cos C > 0$$

$\Rightarrow$ A, B , C là các góc nhọn.

BÀI 9

Tam giác ABC tuỳ ý có cả 3 góc đều nhọn. Xác định giá trị nhỏ nhất của tích.

$$\mathbf{P = tgA tgB tgC}$$

Đại học Dân lập Hùng Vương

GIẢI

Ba góc của tam giác đều nhọn nên tgA, tgB, tgC có giá trị dương. Ta có:

$$\mathrm{tg}(A+B) = \frac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{1 - \mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B} = \mathrm{tg}(\pi - C) = -\mathrm{tg}C$$

Do đó: $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C$

Với ba số dương tgA, tgB, tgC theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C \geq 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C \geq 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C)^3 \geq 27\mathrm{tg}A.\mathrm{tg}B.\mathrm{tg}C$$

$$\Rightarrow \quad (\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C)^2 \geq 27$$

Suy ra $\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C = P \geq \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tích là $P = 3\sqrt{3}$

BÀI 10

Cho tam giác ABC có các góc $C \leq B \leq A \leq 90^0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\mathbf{M = \cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

Đại học Kiến trúc (1999)

GIẢI

Ta có: $$M = \cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \qquad (1)$$

Biết $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

Từ (1) suy ra:

$$M = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+\cos(A-B)}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos A + \cos B}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}[1 + \cos(A-B) - (\cos A + \cos B)] \qquad (2)$$

Xét hiệu $T = \cos(A-B) - (\cos A + \cos B)$

Ta có: $$\sin C\cos(A-B) = \sin(A+B)\cos(A-B)$$

$$= \frac{1}{2}[\sin 2A + \sin 2B]$$

$$= \sin A\cos A + \sin B\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A-B) = \frac{\sin A}{\sin C}\cos A + \frac{\sin B}{\sin C}\cos B$$

Vì $C \le B \le A \le 90^0$ nên $\begin{cases}\sin A \ge \sin B \ge \sin C > 0\\ \cos A \ge 0 \qquad \cos B \ge 0\end{cases}$

Suy ra: $\dfrac{\sin A}{\sin C} \ge \dfrac{\sin B}{\sin C} \ge 1$

và $\cos(A-B) = \dfrac{\sin A}{\sin C}\cos A + \dfrac{\sin B}{\sin C}\cos B \ge \cos A + \cos B$

Do đó: $\cos(A-B) - (\cos A + \cos B) \ge 0$

Từ (2) cho ta giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{1}{4}$

Dấu " = " xảy ra khi:

$$\begin{cases} \frac{\sin C}{\sin A}\cos A = \cos A & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 90^0 \\ A = C \end{array}\right. \\ \frac{\sin B}{\sin C}\cos B = \cos B & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = 90^0 \\ B = C \end{array}\right. \end{cases}$$

Nếu $A = 90^0$ và $B = 90^0$ thì ΔABC có 2 góc vuông, vô lý.
Nếu $A = 90^0$ và $B = C$ thì ΔABC vuông cân.
Nếu $A = B = C$ thì ΔABC là tam giác đều.

Bài 11

Chứng minh rằng nếu ABC là tam giác nhọn thì:

$$\mathrm{tg}^8A + \mathrm{tg}^8B + \mathrm{tg}^8C \geq 9\mathrm{tg}^2A\,\mathrm{tg}^2B\mathrm{tg}^2C$$

Đại học Sư phạm Vinh (1999, A)

GIẢI

$$\mathrm{tg}(A + B) = \frac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{1 - \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B} \qquad (1)$$

Biết $A + B = \pi - C$ nên $\mathrm{tg}[\pi - C] = -\mathrm{tg}C$

Từ (1) ta có $\mathrm{tg}(A + B) = -\mathrm{tg}C = \frac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{1 - \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C \geq 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C \geq 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\mathrm{tg}C}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C)^3 \geq 27(\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}C)^2 \geq 27$$

Nhân 2 vế với $(\text{tgAtgB tgC})^5$, ta được:

$$(\text{tgAtgB tgC})^8 \geq 27(\text{tgAtgB tgC})^6$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{(\text{tgAtgBtgC})^8} \geq 3\text{tg}^2\text{Atg}^2\text{Btg}^2\text{C}$$

Suy ra: $\sqrt[3]{\text{tg}^8\text{Atg}^8\text{Btg}^8\text{C}} \geq 3\text{tg}^2\text{Atg}^2\text{Btg}^2\text{C}$ (1)

Nhưng $\text{tg}^8\text{A} + \text{tg}^8\text{B} + \text{tg}^8\text{C} \geq 3\sqrt[3]{\text{tg}^8\text{Atg}^8\text{Btg}^8\text{C}}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\text{tg}^8\text{A} + \text{tg}^8\text{B} + \text{tg}^8\text{C} \geq 9\text{tg}^2\text{A tg}^2\text{Btg}^2\text{C}$$

Dấu "=" xảy ra khi ABC là tam giác đều.

BÀI 12

Biết rằng ba góc A, B và C của tam giác thoả mãn hệ thức:

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = m$$

Chứng minh rằng nếu m = 2 thì ABC tam giác là vuông, nếu m > 2 thì ABC là tam giác nhọn và nếu m < 2 thì tam giác có góc tù.

Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông (2000)

GIẢI

Ta có:

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \sin^2C$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \sin^2C$$

$$= 1 - \cos(A+B)\cos(A-B) + 1 - \cos^2C$$

$$= 2 + \cos C[\cos(A-B) - \cos C)]$$

$$= 2 + \cos C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= 2 + \cos A\cos B\cos C \quad (1)$$

Nếu m = 2 Suy ra: $2\cos A\cos B\cos C = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos A = 0\\ \cos B = 0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A, hoặc B hoặc C.}\\ \cos B = 0\end{array}\right.$$

Nếu $m < 2$ Suy ra: $2\cos A\cos B\cos C < 0$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C < 0$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC có một góc tù và 2 góc nhọn.

Nếu $m > 2$ Suy ra: $\cos A\cos B\cos C > 0$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC có ba góc nhọn.

BÀI 13

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC nhọn, ta luôn có:

$$\mathbf{tgA + tgB + tgC \geq cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2}}$$

Đại học Cảnh sát Nhân dân (2000, G)

GIẢI

Chứng minh: $tgA + tgB + tgC \geq cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2}$

Tam giác ABC nhọn nên cosA, cosB, cosC, sinA, sinB và sinC đều > 0. Ta có:

$$tgB + tgC = \frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}$$

$$= \frac{\sin A}{\frac{1}{2}[\cos(B+C)+\cos(B-C)]}$$

$$= \frac{2\sin A}{-\cos A + \cos(B-C)} \qquad (1)$$

Vì $\cos(B-C) < 1$

$\Rightarrow \cos(B-C) - \cos A < 1 - \cos A$

nên $\dfrac{2\sin A}{-\cos A + \cos(B-C)} \geq \dfrac{2\sin A}{1-\cos A} = 2\cot g\dfrac{A}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B = C$

Do đó từ (1) $\Rightarrow$ $$\mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C \geq 2\mathrm{cotg}\frac{A}{2} \qquad (2)$$

Tương tự ta có: $$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}C \geq 2\mathrm{cotg}\frac{B}{2} \qquad (3)$$

$$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B \geq 2\mathrm{cotg}\frac{C}{2} \qquad (4)$$

Cộng (2), (3) và (4) từng vế một ta được bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C \geq \mathrm{cotg}\frac{A}{2} + \mathrm{cotg}\frac{B}{2} + \mathrm{cotg}\frac{C}{2}$$

Dấu "đẳng thức" xảy ra khi $A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ là đều.

BÀI 14

Cho tam giác ABC có $0 < A \leq B \leq C < 90^0$. Chứng minh:

$$\frac{2\cos 3C - 4\cos 2C + 1}{\cos C} \geq 2$$

Đại học Mỏ Địa chất Hà Nội (2000)

GIẢI

Với A, B, C là ba góc có $0 < A \leq B \leq C < 90^0$. Chứng minh:

$$\frac{2\cos 3C - 4\cos 2C + 1}{\cos C} \geq 2 \qquad (1)$$

Vì $C < 90^0$ nên $\cos C > 0$

Thế $\cos 3C = 4\cos^3 C - 3\cos C$ và $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$ vào (1) ta được:

$$2(4\cos^3 C - 3\cos C) - 4(2\cos^2 C - 1) + 1 \geq 2\cos C$$
$$8\cos^3 C - 8\cos^2 C - 8\cos C + 5 \geq 0 \qquad (2)$$

Từ giả thiết suy ra: $60^0 \leq C < 90^0 \Leftrightarrow 0 < \cos C \leq \frac{1}{2}$

Đặt $\cos C = t$ thì $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, khi đó (2) trở thành:

$$f(t) = 8t^3 - 8t^2 - 8t + 5 \geq 0$$

$$f'(t) = 24t^2 - 16t - 8 = 8(3t^2 - 2t - 1)$$

t		$-\frac{1}{3}$		1	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$f'(t) = 0 \text{ khi } t_1 = 1 \text{ và } t_2 = -\frac{1}{3}$$

$$f'(t) < 0 \text{ khi } t \in \left(-\frac{1}{3},\ 1\right)$$

$$\Rightarrow\ f'(t) < 0 \text{ khi } t \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f(t) \text{ nghịch biến khi } t \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right]$$

Suy ra f(t) có giá trị nhỏ nhất $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ nên (2) đúng.

BÀI 15

Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thoả mãn hệ thức:

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$$

Chứng minh rằng $A \leq 60^0$.

Đại học Sư phạm Hà Nội (2000, B)

GIẢI

Hệ thức: $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$ (1)

Biết: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

suy ra: $\sin A = \dfrac{a}{2R}$; $\sin B = \dfrac{b}{2R}$; $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

(1) $\Rightarrow$ $\dfrac{b^2}{4R^2} + \dfrac{c^2}{4R^2} = 2.\dfrac{a^2}{4R^2}$

$\Leftrightarrow$ $b^2 + c^2 = 2a^2$

Từ định lý hàm số cosin $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ suy ra

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - \dfrac{b^2 + c^2}{2}}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2}{4bc} \geq \frac{2bc}{4bc}$$

$$\Rightarrow \quad \cos A \geq \frac{1}{2} = \cos 60^0$$

$$\Rightarrow \quad A \leq 60^0 \text{ (đpcm).}$$

BÀI 16

Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh thoả mãn hệ thức:

$$c^4 = a^4 + b^4$$

Chứng minh rằng ΔABC có ba góc nhọn và $2\sin^2 C = tgAtgB$.

Đại học Thuỷ lợi cơ sở II (2000)

GIẢI

Từ định lý hàm số cosin ta suy ra:

$$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2 \qquad (1)$$

Nhân 2 vế của (1) với $a^2 + b^2 + c^2$ ta có:

$$(a^2 + b^2 + c^2).2ab\cos C = (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$= (a^2 + b^2)^2 - c^4$$
$$= a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - (a^4 + b^4)$$
$$= 2a^2b^2$$

$$\Rightarrow \quad (a^2 + b^2 + c^2)\cos C = ab \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra $\cos C > 0 \Rightarrow C < 90^0$

Từ $c^4 = a^4 + b^4$ suy ra $c > a$; $c > b \Rightarrow C$ là góc lớn nhất của $\Delta ABC \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác nhọn.

Ta có: $2\sin^2 C = tgAtgB$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 C = \frac{\sin A}{\cos A}.\frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos A\cos B = \frac{\sin A}{\sin C}.\frac{\sin B}{\sin C} \qquad (2)$$

Thế $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ và $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ vào (2) ta được:

$$2\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad (c^2 + b^2 - a^2)[c^2 - (b^2 - a^2)] = 2a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c^4 - (b^2 - a^2)^2 = 2a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c^4 - (b^4 + a^4 - 2a^2b^2) = 2a^2b^2$$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2b^2 = 2a^2b^2$ luôn đúng $\Rightarrow$ (đpcm).

BÀI 17

Xác định dạng của tam giác ABC biết rằng:

$(1 + \text{cotg}A)(1 + \text{cotg}B) = 2$

Đại học Sư phạm Vinh (2000, D)

GIẢI

Biết $\text{cotg}A = \dfrac{1}{\text{tg}A}$ nên: $(1 + \text{cotg}A)(1 + \text{cotg}B) = 2$.

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{\text{tg}A}\right)\left(1 + \frac{1}{\text{tg}B}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad (\text{tg}A + 1)(\text{tg}B + 1) = 2\,\text{tg}A\text{tg}B.$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}A + \text{tg}B = -(1 - \text{tg}A\text{tg}B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{tg}A + \text{tg}B}{1 - \text{tg}A\text{tg}B} = -1$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}(A + B) = -\text{tg}\frac{\pi}{4} = -\text{tg}\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \text{tg}\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad A + B = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad C = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Vậy tam giác ABC có góc $C = \dfrac{\pi}{4}$ và tổng $A + B = \dfrac{3\pi}{4}$

Bài 18

Trong tam giác có tgA.tgB = 3, tgB.tgC = 6. Chứng minh rằng ABC có một góc bằng 45^0.

Đại học Nông nghiệp Hà Nội (2001, A)

GIẢI

Biết $A + B = \pi - C$ nên $tg(A + B) = tg(\pi - C) = -tgC$

và
$$tg(A + B) = \frac{tgA + tgB}{1 - tgA.tgB} = -tgC$$

$$\Leftrightarrow \quad tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC \qquad (1)$$

Nhân hai vế của (1) với tgB ta được:

$$(tgA + tgB + tgC)tgB = tgA.tgBtgtB.tgC \qquad (2)$$

Thế tgA.tgB = 3 và tgB.tgC = 6 vào (2) ta được:

$$tgAtgB + tg^2B + tgBtgC = 3.6$$

$$3 + tg^2B + 6 = 18$$

$$tg^2B = 9 \Leftrightarrow tgB = \pm 3$$

Với tgB = 3 thì tgA = 1 $\Rightarrow$ $A = 45^0$

Với tgB = -3 thì tgA=-1 $\Rightarrow$ A, B là hai góc tù (loại)

Như vậy tam giác ABC có một góc bằng 45^0.

VI. TAM GIÁC KHÔNG TÙ :

BÀI 1

Chứng minh, nếu tam giác ABC không phải là tam giác tù thì:

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4$$

Đại học Y khoa Hải Phòng (1996)

GIẢI

Tam giác ABC không có góc tù thì cosA, cosB và cosC đều có giá trị dương nên:

$$\sin A.\sin B \geq \sin A.\sin B - \cos A.\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A.\sin B \geq -\cos(A + B) = \cos C \geq 0 \qquad (1)$$

Hai vế của bất đẳng thức đều dương, bình phương 2 vế (1) ta có:

$$\sin^2 A.\sin^2 B \geq \cos^2 C$$

Tương tự: $\sin^2 B.\sin^2 C \geq \cos^2 A$

$$\sin^2 C.\sin^2 A \geq \cos^2 B$$

Ta có:

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) = 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C +$$

$$+ \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C + \sin^2 A\sin^2 C + \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$$

$$> 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C +$$

$$+ \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$$

$$= 1 + (\sin^2 A + \cos^2 A) + (\sin^2 B + \cos^2 B) + (\sin^2 C + \cos^2 C)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Vậy: $(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4$

BÀI 2

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không có góc tù thì:

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}\ge 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Đại học Quốc gia T.P. Hồ Chí Minh (1997, A)

GIẢI

Ta có: $$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}\ge 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

Mẫu số: $\cos A+\cos B+\cos C = 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>1$

$$(1)\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C\ge \cos A+\cos B+\cos C+\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow (\sin A-\cos A)+(\sin B-\cos B)+(\sin C-\cos C)\ge \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right]\ge\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right]\ge \cos A+\cos B+\cos C \quad (2)$$

Để chứng minh bất đẳng thức (1), ta chứng minh bất đẳng thức (2).

Ta có:

$$\cos A+\cos B+\cos C=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)$$

$$=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\pi+(B+C)\right]+\sin\left[\frac{\pi}{2}-\pi+(A+C)\right]+\sin\left[\frac{\pi}{2}-\pi+(A+B)\right]$$

$$= \sin\left(B+C-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(A+C-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left[\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\sin\left[\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\sin\left[\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$+\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$+\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\leq 2\left[\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad \text{(đpcm).}$$

BÀI 3

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không tù thì:

$$\mathbf{\cos A + \cos B + \cos C \leq \sin A + \sin B + \sin C}$$

Đại học Sư phạm Vinh (1999, G)

GIẢI

Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \sin A + \sin B + \sin C \quad (1)$

Tam giác ABC có các góc A, B, C là các góc nhọn nên $\cos A$, $\cos B$, $\cos C \geq 0$; $\sin A$, $\sin B$, $\sin C > 0$

Bình phương hai vế (1) ta có:

$$(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \leq (\sin A + \sin B + \sin C)^2$$

$\Leftrightarrow \quad (\cos A + \cos B + \cos C)^2 - (\sin A + \sin B + \sin C)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (\cos^2 A - \sin^2 A) + (\cos^2 B - \sin^2 B) + (\cos^2 C - \sin^2 C) + 2(\cos A \cos B - \sin A \sin B) + 2(\cos B \cos C - \sin B \sin C) + 2(\cos C \cos A - \sin C \sin A) \leq 0$

$\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 2\cos(A+B) + 2\cos(B+C) + 2\cos(C+A) \leq 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 A - 1 + 2\cos^2 B - 1 + 2\cos^2 C - 1 - 2\cos C - 2\cos A - 2\cos B \leq 0$

$\Leftrightarrow 2\cos A(\cos A - 1) + 2\cos B(\cos B - 1) + 2\cos C(\cos C - 1) - 3 \leq 0$

Vì $\cos A, \cos B, \cos C \geq 0$ và $(\cos A - 1), (\cos B - 1), (\cos C - 1) \leq 0$

nên $\cos A(\cos A - 1) \leq 0$

$\cos B(\cos B - 1) \leq 0$

$\cos C(\cos C - 1) \leq 0$

Do đó (2) luôn đúng (đpcm).

VII. TAM GIÁC TÙ :

BÀI 1

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh a, b, c thoả mãn:

$$a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác có một góc tù.

Đại học Quốc gia Hà Nội (1996, B)

GIẢI

Ta có: $c^{\frac{4}{3}}=a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}$

Luỹ thừa bậc ba hai vế ta có:

$$c^4=\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)^3$$

$$=a^4+b^4+3a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$>a^4+b^4+a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$\geq a^4+b^4+a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{4}{3}}.2\sqrt{a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{4}{3}}}$$

$$=a^4+b^4+a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{4}{3}}.2a^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{2}{3}}$$

$$=a^4+b^4+2a^2b^2=(a^2+b^2)^2$$

Suy ra $c^2>a^2+b^2$.

Biết $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$ suy ra $C>90^0$.

Vậy tam giác ABC có một góc tù ($C>90^0$).

BÀI 2

Chứng minh rằng, ABC là tam giác tù khi và chỉ khi:

$$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C > 1$$

GIẢI

Bất đẳng thức đã cho: $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C > 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}
\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C &= \frac{1}{2}(1+\cos2A) + \frac{1}{2}(1+\cos2B) + \cos^2C \\
&= 1 + \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \cos^2C \\
&= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2C \\
&= 1 - \cos C\cos(A-B) + \cos^2C \\
&= 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos C] \\
&= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\
&= 1 - 2\cos A\cos B\cos C
\end{aligned}$$

Do đó:

$$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\cos A\cos B\cos C > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A\cos B\cos C < 0.$$

$\Leftrightarrow$ Trong ba góc A, B , C có ít nhất một góc tù.

BÀI 3

Các góc A, B, C của tam giác ABC thoả mãn:

$$\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}.$$

Chứng minh rằng $C = 120^0$,

Đại học An ninh (2000, A)

GIẢI

$$\sin A + \sin B + \sin C - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Biến đổi vế trái của (1):

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B + \sin C &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= 2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2})\\ &= 2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2})\\ &= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (2)\end{aligned}$$

Thế (2) vào (1), ta có:

$$\begin{aligned}4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} &= 2\sin\frac{C}{2}\\ &= 2\cos\frac{A+B}{2}\\ &= 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \qquad (3)$$

Vì $\frac{A}{2} \neq 90^0 \Rightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \neq 0$ nên từ (3) suy ra: $\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{C}{2} = 60^0$$

$$\Leftrightarrow \qquad C = 120^0.$$

VIII. CẤP SỐ CỘNG :

BÀI 1

Trong tam giác ABC, số đo ba góc A, B, C tạo thành một cấp số cộng với $A \geq B \geq C$, giả sử rằng:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

1. Hãy tính số đo của các góc A, B, C.

2. Tính độ dài các cạnh tam giác ABC nếu biết thêm bán kính đường tròn nội tiếp r = 1.

Đại học Kiến trúc TP. Hồ Chí Minh (1995)

GIẢI

1. Ta có: $$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \qquad (1)$$

Ba góc A, B, C tạo thành một cấp số cộng nên

$$A + C = 2B \text{ suy ra } A + B + C = 3B = \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$$

và $$A + C = \frac{2\pi}{3}$$

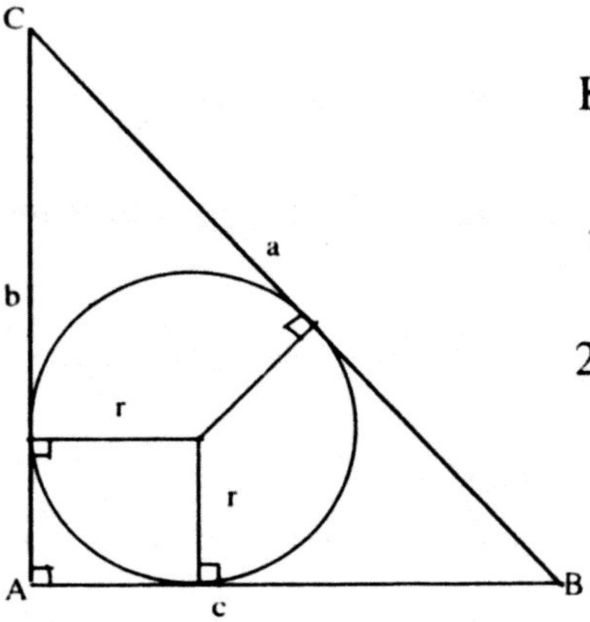
$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} + \cos B$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{A-C}{2} + \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 2.\frac{1}{2}\cos\frac{A-C}{2} + \frac{1}{2} = \cos\frac{A-C}{2} + \frac{1}{2}$$

Do đó từ (1) suy ra:

$$\cos\frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow A - C = \frac{\pi}{3}$$



Kết hợp $A + C = \frac{2\pi}{3}$,

ta được $A = \frac{\pi}{2}$ và $C = \frac{\pi}{6}$

2. ΔABC có cạnh huyền $CB = a$,

$$\hat{C} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow AB = c = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow \qquad AC = b = \sqrt{CB^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}bc = pr$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}a\right).1$$

Từ đó suy ra:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 2(\sqrt{3} + 1) \\ b = 3 + \sqrt{3} \\ c = \sqrt{3} + 1 \end{array}}$$

BÀI 2

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 1. Gọi A, B, C là các góc; a, b, c là các cạnh của tam giác. Biết rằng các góc A, B, C lập thành cấp số nhân công bội bằng 2. Tính tổng $a^2+b^2+c^2$.

Đại học Quốc gia Hà Nội (1995)

GIẢI

Giả sử $0 < A < B < C$.

Ta có các góc A, B, C lập thành cấp số nhân, công bội là 2 nên:

$$B = 2A\ ,\ C = 2B = 4A.$$

Biết $A + B + C = \pi \Rightarrow A = \frac{\pi}{7}, B = \frac{2\pi}{7}$ và $C = \frac{4\pi}{7}$

Theo định lý hàm số sin, ta có:

$$a = 2R\sin A = 2\sin\frac{\pi}{7}$$

$$b = 2R\sin B = 2\sin\frac{2\pi}{7}$$

$$c = 2R\sin C = 2\sin\frac{4\pi}{7}$$

Do đó:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1-\cos\frac{8\pi}{7}}{2}\right)$$

$$= 2\left[3 - \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right)\right] \qquad (1)$$

Tính tổng $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = S$

$$2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = 2S\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{9\pi}{7}-\sin\pi\right)=2S\sin\frac{\pi}{7}$$

$$-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\left(2\pi-\frac{5\pi}{7}\right)=2S\sin\frac{\pi}{7}$$

$$-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}=2S\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \qquad S=-\frac{1}{2}$$

Do đó: $a^2+b^2+c^2=2\left[3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=7$

BÀI 3

Ba góc A, B, C của một tam giác lập thành một cấp số cộng. Tính các góc của tam giác ấy biết rằng:

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

Đại học Mỹ thuật Công nghiệp Hà Nội (1996)

GIẢI

Ba góc tam giác lập thành một cấp số cộng nên:

$\frac{A+C}{2}=B$ mà $A+B+C=\pi$ suy ra $3B=\pi$

$$\Rightarrow \qquad B=\frac{\pi}{3}$$

Do đó hệ thức: $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ với $B=\frac{\pi}{3}$ là

$$\sin A+\sin\frac{\pi}{3}+\sin C=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A + \sin C = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2.\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos\frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

Do đó: $A - C = \frac{\pi}{3}$ mà $A + C = \pi - B = \frac{2\pi}{3}$

suy ra: $2A = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2} \text{ và } C = \pi - (A+B) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{6}$$

Vậy các góc của tam giác ABC là $B = \frac{\pi}{3}$, $A = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$.

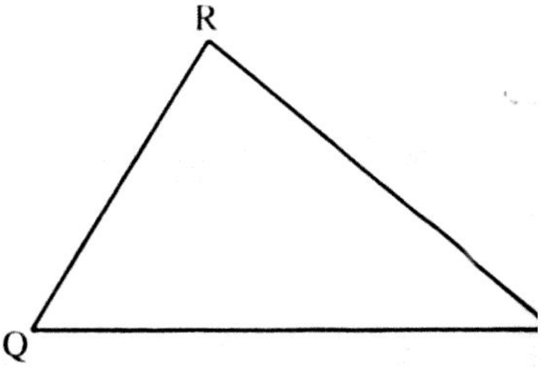
BÀI 4

Tam giác PQR có các góc P, Q, R theo thứ tự tạo thành cấp số nhân với công bội q = 2. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{QR} = \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PR}$$

Đại học Hàng hải, cơ sở II (1996)

GIẢI



P, Q, R là cấp số nhân có công bội 2 nên Q = 2P, R = 2Q = 4P

Vì P + Q + R = π suy ra:

$$\hat{P} = \frac{\pi}{7},\ \hat{Q} = \frac{2\pi}{7},\ \hat{R} = \frac{4\pi}{7}$$

Tacó: $$\frac{1}{PQ} + \frac{1}{PR} = \frac{1}{2R\sin R} + \frac{1}{2R\sin Q} = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}\right)$$

$$= \frac{1}{2R}\left(\frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}\right) = \frac{1}{2R}\left(\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}\right)$$

$$= \frac{1}{2R}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}\right) = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\right) = \frac{1}{2R\sin P} = \frac{1}{QR}$$

BÀI 5

Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì góc B thoả mãn: $B \le \frac{\pi}{3}$.

Đại học Thương mại (1998)

GIẢI

a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

Theo định lý hàm số cosin ta có:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Suy ra: $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$= \frac{1}{2ac}\left[a^2 + c^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2ac}\left[a^2 + c^2 - \frac{a^2+c^2+2ac}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2ac}\left[\frac{3(a^2+c^2)-2ac}{4}\right] \geq \frac{6ac-2ac}{8ac} = \frac{1}{2}$$

$$\cos B \geq \frac{1}{2} \Rightarrow B \leq \frac{\pi}{3}.$$

BÀI 6

Chứng minh rằng trong tam giác ABC nếu cotgA, cotgB, cotgC theo thứ tự tạo thành cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng tạo thành cấp số cộng.

Đại học Thương mại (2000)

GIẢI

Theo định lý hàm số cosin ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\sin A\,\mathrm{cotg}A$$
$$= b^2 + c^2 - 4S\,\mathrm{cotg}A$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{cotg}A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} \qquad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\text{cotgB} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} \qquad (2)$$

$$\text{cotgC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \qquad (3)$$

Biết cotgA, cotgB, cotgC tạo thành một cấp số cộng nên:

$$2\text{cotgB} = \text{cotgA} + \text{cotgC}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(c^2 + a^2) = 4b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 + a^2 = 2b^2 \qquad (3)$$

(3) chứng tỏ a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng.

BÀI 7

A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng: nếu $\text{cotg}\frac{A}{2}$, $\text{cotg}\frac{B}{2}$, $\text{cotg}\frac{C}{2}$ lập thành một cấp số cộng (theo thứ tự đó) thì $\text{cotg}\frac{A}{2}\ \text{cotg}\frac{C}{2} = 3$.

Đại học Giao thông (cơ sở II) TP. Hồ Chí Minh (2000)

GIẢI

Biết $\text{cotg}\frac{A}{2}$, $\text{cotg}\frac{B}{2}$, $\text{cotg}\frac{C}{2}$ lập thành một cấp số cộng nên:

$$2\ \text{cotg}\frac{B}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\text{tg}\frac{A + C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\frac{\dfrac{1}{\text{cot g}\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\text{cot g}\frac{C}{2}}}{1 - \dfrac{1}{\text{cot g}\frac{A}{2}} \cdot \dfrac{1}{\text{cot g}\frac{C}{2}}} = \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2\frac{\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{A}{2}}{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}-1}=\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Chia 2 vế của (2) cho $\text{cotg}\frac{A}{2}+\text{cotg}\frac{C}{2}>0$ ta được:

$$\frac{2}{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}-1}=1$$

$$\Rightarrow \qquad \text{cotg}\frac{A}{2}\,\text{cotg}\frac{C}{2}=3.$$

BÀI 8

Cho $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ và các số cotgA, cotgB, cotgC theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Tính giá trị của biểu thức cotgAcotgC.

Đại học Giao thông (cơ sở II) TP. Hồ Chí Minh (2000)

GIẢI

Biết: $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ và $\text{cotg}A+\text{cotg}C=2\,\text{cotg}B$ (1)

Ta có: $\text{cotg}(A+B)=\text{cotg}(\frac{\pi}{2}-C)=\text{tg}C=\frac{1}{\cot gC}$.

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\cot gA\cot gB-1}{\cot gA+\cot gB}=\frac{1}{\cot gC}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \text{cotg}A\text{cotg}B\text{cotg}C-\text{cotg}C=\text{cotg}A+\text{cotg}B$$

$$\Leftrightarrow \qquad \text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C=\text{cotg}A\text{cotg}B\text{cotg}C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$3\text{cotg}B=\text{cotg}A\text{cotg}B\text{cotg}C$$

$$\Rightarrow \qquad \text{cotg}A\text{cotg}C=3.$$

MỤC LỤC

Trang

CHƯƠNG I:

Những điều cần nhớ và những công thức lượng giác....................3

CHƯƠNG II:

PHẦN HƯỚNG DẪN:

Đề thi từ năm 1970 đến năm1991..13
Những đề lượng giác thi đại học và Cao đẳng trong toàn quốc từ năm 1992 đến năm 2001..38
I. Tam giác thường...38
II. Tam giác cân..132
III. Tam giác vuông...145
IV. Tam giác đều..171
V. Tam giác nhọn...236
VI. Tam giác không tù...254
VII. Tam giác tù...258
VIII. Cấp số.. 261
Mục lục...270